



Thèse
Présentée pour obtenir le titre de Docteur de
l'Institut National Polytechnique de Toulouse
Spécialité : Sciences de la Terre et Environnement
Option : Hydrologie

ESTIMATION DE PARAMÈTRES EN HYDRAULIQUE FLUVIALE, À PARTIR DE DONNÉES CARACTÉRISTIQUES DE L'IMAGERIE AÉRIENNE

HÉLÈNE ROUX

Soutenue le 10 décembre 2004 devant le jury composé de :

M.	François-Xavier	Le Dimet	Rapporteur
M.	Kim Dan	Nguyen	Rapporteur
Mme	Marie-José	Lefèvre	Membre
M.	Christian	Puech	Membre
M.	Michel	Quintard	Président du jury
M.	Denis	Dartus	Directeur de thèse

N° d'ordre : 2180

C'est avec pas mal de satisfaction, mais tout de même un brin de nostalgie, que je suis sur le point de mettre un terme à cette période de mon existence durant laquelle la question, récurrente, "mais tu es encore étudiante ?" ne possédait pas de réponse simple. A ceux qui ont fait un peu partie de ma vie pendant tout ce temps : merci. Merci

aux membres du jury et, plus particulièrement aux rapporteurs, étant donné le poids du mémoire,

à Denis, mon directeur de thèse, fidèle témoin de mon assurance sans précédent, de mon optimisme sans faille et de ma passion pour la précision à six chiffres significatifs,

à Marie, à Jacques, grâce à qui je suis notamment sur le point de me lancer dans une carrière d'informaticienne (comprenez qui pourra...), et à Sylvie,

à tous ceux avec qui j'ai travaillé, ceux qui m'ont fourni les données nécessaires à la poursuite de mon travail, ceux qui ont pris le temps de répondre à mes questions et auprès de qui j'ai beaucoup appris, je pense également aux enseignants de l'ENSEEIH,

à Olivier Thual qui s'est donné la peine de lire ce mémoire et de me faire part de ses suggestions,

à toutes les personnes que j'ai côtoyées au sein de l'IMFT, à ceux avec qui j'ai pris le thé, à ceux avec qui j'ai refait le monde, à ceux qui me regardent patiemment (et longuement) manger (lentement) le midi : bien mâcher c'est important !

à ceux qui me supportaient déjà bien avant que j'ai ne serait-ce que l'idée d'entreprendre une thèse, à ceux qui me supportent depuis que je suis née, à celui qui partage ma vie.

Vous avez contribué à rendre agréable et passionnant mon séjour à l'IMFT, grâce à vous j'ai aimé y vivre et y travailler. Pas de liste de noms ici, j'espère vous avoir déjà montré à quel point j'ai apprécié votre compagnie durant ces trois années. Et puisque vous avez contribué, au même titre que ce qui va suivre, à construire cette thèse, je vous dédie cette page... ainsi qu'une petite explication littéraire à ce mémoire de sciences :

J'ai de sérieuses raisons de croire que la planète d'où venait le petit prince est l'astéroïde B 612. Cet astéroïde n'a été aperçu qu'une fois au télescope, en 1909, par un astronome turc.

Il avait alors fait une grande démonstration de sa découverte à un Congrès International d'Astronomie. [...]

Si je vous ai raconté ces détails sur l'astéroïde B 612 et si je vous ai confié son numéro, c'est à cause des grandes personnes. Les grandes personnes aiment les chiffres. [...]

Ainsi, si vous leur dites : "La preuve que le petit prince a existé c'est qu'il était ravissant, qu'il riait, et qu'il voulait un mouton. Quand on veut un mouton, c'est la preuve qu'on existe" elles hausseront les épaules et vous traiteront d'enfant ! Mais si vous leur dites : " la planète d'où il venait est l'astéroïde B 612" alors elles seront convaincues.

Antoine de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince*

*Autant liuen que me rapelle, vese davans mis iue,
au miejour, eilalin, uno bancado de mountagno
que, dóu matin au vèspre, si mourre, si calanc,
si baus e si valoun, quouro clar, quouro encre,
bluiejon en oundado [...] encenturado d'óulivié
coume uno roucaredo grèco, un veritable miradou
de glòri e de legèndo.*

Frédéric Mistral, *Memòri e raconte*

A la memòri de moun paire-grand

Aux Miens

Table des matières

Table des figures	xi
Liste des tableaux	xvii
Nomenclature	xxiii
Introduction générale	1
I Synthèse bibliographique	9
1 Modélisation hydraulique et télédétection	11
1.1 Introduction	12
1.2 Les modèles hydrauliques	12
1.2.1 Typologie des modèles utilisés en hydraulique fluviale	12
1.2.1.1 Les modèles monodimensionnels	12
1.2.1.2 Les modèles à casiers	13
1.2.1.3 Les modèles bidimensionnels	14
1.2.2 Évaluation des modèles 1D et 2D pour la prédiction de l'étendue inondée	14
1.3 La modélisation filaire	16
1.3.1 Les équations de Saint-Venant monodimensionnelles	16
1.3.1.1 Expression générale	16
1.3.1.2 Régime permanent et uniforme	17
1.3.1.3 Régime graduellement varié	18
1.3.2 La rugosité	18
1.3.2.1 Le coefficient de Strickler	18
1.3.2.2 Modélisation en lit composé	19
1.4 Résolution des équations de Saint-Venant monodimensionnelles	21
1.4.1 Régime permanent	21
1.4.2 Régime non permanent, sans débit d'apport	22
1.4.2.1 Discrétisation en différences finies et linéarisation	23

1.4.2.2	Résolution des équations	25
1.5	Apport de la télédétection	26
1.5.1	Définitions	26
1.5.2	Informations accessibles	27
1.5.2.1	En période de crue	27
1.5.2.2	Hors crue	28
1.6	Conclusions	29
2	Assimilation de données appliquée à l'estimation de paramètres	31
2.1	Introduction	33
2.2	La théorie de l'estimation	35
2.2.1	Approche simplifiée	35
2.2.1.1	Première approche : minimisation de la variance d'erreur de l'estimation	35
2.2.1.2	Deuxième approche : moindres carrés pondérés	37
2.2.2	Généralisation au cas multi-dimensionnel	37
2.2.2.1	Minimisation de la variance de l'estimateur linéaire	38
2.2.2.2	Moindres carrés pondérés	41
2.2.2.3	Opérateur d'observation non linéaire	41
2.2.2.4	Méthode de minimisation numérique	42
2.2.3	Filtre de Kalman	44
2.2.3.1	Méthodologie	44
2.2.3.2	Extension aux modèles non-linéaires : le filtre de Kalman étendu	46
2.2.3.3	Application à l'estimation de paramètres - Cas stationnaire	47
2.3	Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur la prévision	48
2.3.1	Generalized Sensitivity Analysis (GSA)	48
2.3.1.1	Introduction	48
2.3.1.2	Méthodologie de l'analyse de sensibilité généralisée	49
2.3.2	Generalized Likelihood Uncertainty Estimation (GLUE)	52
2.3.2.1	Introduction	52
2.3.2.2	Définition d'une fonction de vraisemblance	53
2.3.2.3	Distribution des paramètres <i>a priori</i>	54
2.3.2.4	Estimation de l'incertitude	54
2.3.2.5	Sensibilité à un paramètre	55
2.3.2.6	Mise à jour de la vraisemblance en présence de nouvelles observations	56
2.3.2.7	Évaluation de l'apport des nouvelles observations	56
2.4	Principales difficultés liées à l'assimilation de données en hydraulique	58
2.4.1	Détermination des erreurs	58

2.4.2	Non-linéarité du modèle	59
2.5	Conclusions	60
II	Expériences jumelles	61
3	Introduction et méthodologie des expériences jumelles	63
3.1	Méthodologie des expériences jumelles	64
3.1.1	Principe	64
3.1.2	Génération des données	64
3.2	Techniques d'estimation mises en oeuvre dans le cas d'un écoulement permanent	65
3.2.1	Minimisation d'un critère d'erreur	65
3.2.2	Filtre de Kalman étendu	67
3.3	Technique d'estimation mise en oeuvre dans le cas d'un écoulement non permanent	68
3.4	Synthèse	68
4	Cas d'un écoulement monodimensionnel permanent	71
4.1	Description du problème	72
4.2	Reconstitution de quatre paramètres	74
4.2.1	Cas tests	75
4.2.2	Résultats obtenus : minimisation d'une fonction coût	77
4.2.3	Résultats obtenus : filtre de Kalman étendu	81
4.2.4	Comparaison des différentes méthodes	85
4.2.4.1	Filtre de Kalman étendu et minimisation d'une fonction coût prenant en compte toutes les observations disponibles	85
4.2.4.2	Filtre de Kalman étendu et minimisation d'une fonction coût prenant en compte les observations une par une	86
4.2.5	Intervalle de confiance	87
4.2.5.1	Définition et méthode de calcul	87
4.2.5.2	Présentation des résultats	88
4.2.6	Analyse de sensibilité	90
4.2.7	Conclusions	95
4.3	Reconstitution de six paramètres	95
4.3.1	Description des cas testés	96
4.3.2	Résultats obtenus	96
4.3.3	Analyse de sensibilité	100
4.4	Conclusions	104
5	Cas d'un écoulement monodimensionnel non permanent	105
5.1	Position du problème	106
5.2	Cas test	106

5.3	Reconstitution du débit amont	109
5.3.1	Géométrie parfaitement connue	109
5.3.1.1	Ligne d'eau et débit initiaux non bruités	110
5.3.1.2	Ligne d'eau et débit initiaux bruités	111
5.3.1.3	Conclusions	113
5.3.2	Géométrie bruitée	114
5.4	Reconstitution du débit initial et du débit amont	116
5.4.1	Géométrie parfaitement connue	116
5.4.2	Géométrie bruitée	119
5.5	Analyse de sensibilité	120
5.6	Conclusions	124
	Synthèse sur les expériences jumelles	127
III	Application aux sites d'étude	129
6	Sites d'étude et données recueillies	131
6.1	L'Aisne	132
6.1.1	Description du site	132
6.1.2	Données disponibles	134
6.2	La Lèze	136
6.2.1	Description du site	136
6.2.2	Données disponibles	138
6.3	Synthèse des données recueillies	141
7	Estimation de paramètres sur le site de l'Aisne	143
7.1	Introduction	144
7.2	Reconstitution d'une géométrie équivalente	145
7.2.1	Méthodologie	145
7.2.2	Résultats obtenus	147
7.2.3	Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur les grandeurs simulées	150
7.3	Utilisation de la topographie du lit majeur	154
7.4	Conclusions sur le site de l'Aisne	159
8	Estimation de paramètres sur le site de la Lèze	161
8.1	Introduction	162
8.2	Reconstitution d'une géométrie équivalente	162
8.2.1	Résultats obtenus	163
8.2.2	Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur les grandeurs simulées	170
8.2.3	Transfert de la calibration d'un événement à un autre	172

8.3	Construction progressive du profil en travers	175
8.4	Conclusions sur le site de la Lèze	179
Synthèse sur les deux sites d'étude		183
Conclusions et perspectives		185
Bibliographie		191
Annexes		197
A	Résolution des équations de Saint-Venant monodimensionnelles	199
A.1	Discretisation des équations à l'aide du schéma de Preissmann	200
A.1.1	Discretisation de l'équation de continuité	200
A.1.2	Discretisation et linéarisation de l'équation dynamique	201
A.2	Résolution des équations par la méthode du double balayage	205
A.2.1	Sens Amont \rightarrow Aval \rightarrow Amont	205
A.2.2	Sens Aval \rightarrow Amont \rightarrow Aval	207
B	Cas d'un écoulement permanent : estimation de quatre paramètres	209
B.1	Minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3	210
B.1.1	Valeurs initiales des trois fonctions coûts	210
B.1.2	Valeurs finales des trois fonctions coûts	211
B.2	Pourcentages d'erreur sur les valeurs optimales	212
B.3	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées	218
B.4	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées	222
B.5	Analyse de sensibilité	230
B.5.1	Valeurs de vraisemblance	230
B.5.2	Densités de probabilité cumulatives	234
C	Cas d'un écoulement permanent : estimation de six paramètres	239
C.1	Minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3	240
C.1.1	Valeurs initiales des trois fonctions coûts	240
C.1.2	Valeurs finales des trois fonctions coûts	241
C.2	Pourcentages d'erreur sur les valeurs optimales	242
C.3	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées	248
C.4	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées	252
C.5	Analyse de sensibilité	259
C.5.1	Valeurs de vraisemblance	259
C.5.2	Densités de probabilité cumulatives	263

D	Cas d'un écoulement non permanent : analyse de sensibilité	267
D.1	Valeurs de vraisemblance	268
D.2	Densités de probabilité cumulatives	270
E	Transfert de calibration sur le site de la Lèze	273

Table des figures

1	Nombre de communes déclarées en état de catastrophe naturelle depuis l'instauration de cette procédure en 1982	5
1.1	Quelques types de réseaux hydrauliques	13
1.2	Représentation d'un cours d'eau par un modèle monodimensionnel	13
1.3	Plaine d'inondation présentant de fortes singularités (Hérault, 6/11/1994)	15
1.4	Définition des variables hydrauliques intervenant dans les équations de Saint-Venant	17
1.5	Lit composé, d'après Langendoen (2000)	20
1.6	Échanges de quantité de mouvement entre lits mineur et majeur	22
1.7	Schéma implicite de Preissmann	24
1.8	Exemple de classification sol/sursol à partir de levé laser aéroporté	29
2.1	Principe de l'assimilation de données a) séquentielle, b) variationnelle	34
2.2	Densités de probabilité cumulatives du paramètre x^k	50
2.3	Statistique du test de Kolmogorov-Smirnov bilatéral d_{m_c, n_c}	51
2.4	Calcul des marges d'incertitude sur les prévisions du modèle	55
2.5	Principales étapes de l'analyse de sensibilité et du calcul d'incertitude utilisant les méthodes GSA et GLUE	57
3.1	Méthodologie des expériences jumelles	65
3.2	Opérateur d'observation \mathcal{H}	66
3.3	Étapes de la méthode	67
3.4	Filtre de Kalman étendu, appliqué à l'estimation de paramètres en régime permanent	68
4.1	Écoulement dénoyé au dessus d'un seuil épais	73
4.2	Cours d'eau étudié : a) Profil en long, b) Profil en travers	74
4.3	Largeurs de la zone inondée a) cas test n°1, b) cas test n°2	76
4.4	Opérateur d'observation \mathcal{H} , en régime permanent	78
4.5	Valeurs des paramètres estimées par Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , cas n°2, jeu initial n°1	80
4.6	Illustration en 2D du fonctionnement des méthodes de minimisation "locales", lorsque la fonctionnelle à minimiser n'est pas convexe sur l'ensemble du domaine de définition	82

4.7	Évolution de Φ_2 en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de minimisation dans le cas test n°1, $\sigma = 0.006$, a) jeu initial n°1, b) jeu initial n°2	82
4.8	Paramètres estimés avec le filtre de Kalman étendu, cas n°2, jeu initial n°1	83
4.9	Paramètres estimés avec le filtre de Kalman étendu pour chaque tirage, $\sigma = 0.024$, cas n°2, jeu initial n°1	84
4.10	Influence de l'ordre d'introduction des observations sur les valeurs des paramètres estimées avec le filtre de Kalman étendu, $\sigma = 0.006$, cas test n°2, jeu de valeurs initiales n°1	84
4.11	Comparaison des valeurs estimées avec le filtre de Kalman étendu et par minimisation de Φ_1 lorsque les observations sont introduites une par une, par ordre de débit croissant, dans le processus d'assimilation, $\sigma = 0.030$, cas test n°2, jeu de valeurs initiales n°1	86
4.12	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , jeu de valeurs initiales n°1, cas tests n°1 et 2	89
4.13	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas tests n°1 et 2	92
4.14	Densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres calculées à partir de la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e , cas tests n°1 et 2	93
4.15	Valeurs des paramètres estimées par Φ_1 pour les 5 tirages lorsque $\sigma = 0.006$, cas n°2, jeu de valeurs initiales n°2	99
4.16	Valeurs des paramètres estimées par Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , cas n°2, jeu de valeurs initiales n°2, minimisation avec bornes pour $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$	100
4.17	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas tests n°1 et 2	102
4.18	Densités de probabilité cumulatives des six paramètres calculées à partir de la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e , cas tests n°1 et 2	103
5.1	Hydrogramme : schéma des notations employées	107
5.2	Influence de l'étalement ℓ : forme de l'hydrogramme pour $\ell = 6$, $\ell = 16$, $\ell = 35$	108
5.3	Géométrie du cours d'eau étudié	108
5.4	Conditions initiales réelles et bruitées, $\sigma = 0.006$: a) Cote d'eau, b) Débit	112
5.5	Hydrogrammes amonts, réel et optimisé, $\sigma_{geom} = 0.024$, $\sigma = 0.006$, premier tirage	115
5.6	Méthodologie de la reconstitution de $Q(x, t = 0)$ et $Q(x = x_{am}, t)$	117
5.7	Débits initiaux réel et optimisé et leurs intervalles de confiance respectifs, pour un niveau de bruit sur les observations a) $\sigma = 0.006$, b) $\sigma = 0.036$	118
5.8	Cotes d'eau initiales réelle et calculée à partir de $Q_{opt}(x, t = 0)$, pour un niveau de bruit sur les observations a) $\sigma = 0.006$, b) $\sigma = 0.036$	119
5.9	a) Débit initial, b) Cote d'eau initiale, valeur réelle et optimisée, pour un niveau de bruit sur les observations $\sigma = 0.024$, géométrie bruitée : $\sigma_{geom} = 0.006$	120
5.10	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations <i>behavioural</i>	122

5.11	Densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres, calculées à partir de la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e	123
5.12	Variation de l'hydrogramme résultant d'une erreur relative de 62.5 % : a) sur l'étalement de l'hydrogramme ℓ , b) sur la date du pic t_p	124
6.1	Les deux sites d'étude	132
6.2	Bassin versant de l'Aisne et site d'étude, d'après Raclot (2003a)	133
6.3	a) Photo aérienne verticale du site d'étude, b) Exemple de photographie prise pendant la crue de décembre 1993 (Raclot et al., 2000)	134
6.4	a) Extension du lit mineur et de la crue de décembre 1993, b) Topographie du lit majeur	135
6.5	a) Localisation et b) détail du bassin versant de la Lèze, d'après Stream Reach Management	136
6.6	Zones d'étude sur le site de la Lèze	137
6.7	Extension des quatre crues répertoriées sur les trois zones d'étude	139
6.8	Exemple de caractérisation hydrogéomorphologique	140
7.1	Géométrie équivalente du profil en travers	145
7.2	Calcul de la largeur du fond du lit B_0 à partir de la largeur du lit mineur observée : hypothèse de travail	146
7.3	Comparaison des largeurs au miroir observée et optimisée (Vue de dessus)	147
7.4	Valeurs des paramètres estimées, a) Profondeur du lit mineur, b) Pente transversale du lit mineur, b) Pente transversale du lit majeur	149
7.5	Valeur optimale et bornes de l'intervalle de variation, pour les simulations Monte-Carlo, de la profondeur du lit mineur, rive gauche, $H_{lim,g}$	151
7.6	Exemple de valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo, pour un paramètre fonction de x : $H_{lim,g}$, $n_c = 1000$	151
7.7	Illustration du calcul des marges d'incertitude à partir de la densité de probabilité cumulative de la largeur de la zone inondée, simulations <i>behavioural</i>	153
7.8	Marges d'incertitude, 10 % et 90 %, sur l'extension de la zone inondée simulée à partir des paramètres optimisés	154
7.9	Reconstitution du lit mineur	155
7.10	Vue de dessus des largeurs au miroir observées et reconstituées, projetées sur la topographie	156
7.11	Obtention des cotes par projection des largeurs observées sur la topographie	157
7.12	Comparaison entre la cote d'eau reconstituée et celles obtenues par projection des largeurs observées sur la topographie	158
7.13	Écoulement secondaire	158

8.1	Comparaison des largeurs au miroir observée et optimisée pour la zone 3 (Vue de dessus), a) crue de temps de retour 15 ans, b) crue exceptionnelle, c) crue de 1977, d) crue de juin 2000	165
8.2	Valeurs de la profondeur du lit mineur estimées pour les quatre crues, zone 3 . . .	167
8.3	Valeurs de la pente transversale du lit mineur estimées pour les quatre crues, zone 3	168
8.4	Valeurs de la pente transversale du lit majeur estimées pour les quatre crues, zone 3	169
8.5	Comparaison des valeurs de la profondeur du lit mineur rive gauche estimées à partir des quatre crues	169
8.6	Marges d'incertitude, 10 % et 90 %, sur l'extension de la zone inondée par la crue de temps de retour 15 ans, simulée à partir des paramètres optimisés, zone 3 . . .	171
8.7	Simulation de la crue de 1977 à partir de la géométrie calibrée sur la crue de temps de retour 15 ans, zone 3	173
8.8	Simulation de la crue de juin 2000 à partir de la géométrie calibrée sur la crue exceptionnelle, zone 3	174
8.9	Simulation de la crue de juin 2000 à partir de la géométrie calibrée sur la crue exceptionnelle, zone 2	174
8.10	Reconstitution progressive du profil en travers	175
8.11	Comparaison des largeurs au miroir observées et optimisées (après l'étape n°2 : changement de pente dans le lit majeur identifié à partir de la crue de juin 2000), zone 3	177
8.12	Profondeur du lit mineur optimisée (après l'étape n°1), et hauteur de changement de pente du lit majeur optimisée (après l'étape n°2), zone 3	178
8.13	Simulation de la crue exceptionnelle à partir de la géométrie équivalente construite en deux étapes. Étape n°1 : profil en travers à quatre pentes identifié à partir de la crue de temps de retour 15 ans, étape n°2 : changement de pente dans le lit majeur identifié à partir de la crue de juin 2000	179
B.1	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , cas test n°1, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	222
B.2	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_2 , cas test n°1, jeu de valeurs initiales n°2	223
B.3	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_3 , cas test n°1, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	224
B.4	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, filtre de Kalman étendu, cas test n°1, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	225

B.5	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , cas test n°2, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	226
B.6	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_2 , cas test n°2, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	227
B.7	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_3 , cas test n°2, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	228
B.8	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, filtre de Kalman étendu, cas test n°2, jeu de valeurs initiales n°1 (jeu de valeurs initiales n°2 non convergé)	229
B.9	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°1 . . .	230
B.10	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°1 . . .	231
B.11	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°1 . . .	231
B.12	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°2 . . .	232
B.13	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°2 . . .	232
B.14	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°2 . . .	233
B.15	Densités de probabilité des quatre paramètres, fonction \mathcal{L}_s , cas test n°1	234
B.16	Densités de probabilité des quatre paramètres, fonction \mathcal{L}_e , cas test n°1	235
B.17	Densités de probabilité des quatre paramètres, fonction \mathcal{L}_f , cas test n°1	235
B.18	Densités de probabilité des quatre paramètres, fonction \mathcal{L}_s , cas test n°2	236
B.19	Densités de probabilité des quatre paramètres, fonction \mathcal{L}_e , cas test n°2	236
B.20	Densités de probabilité des quatre paramètres, fonction \mathcal{L}_f , cas test n°2	237
C.1	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , minimisation avec bornes pour $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$, cas test n°1, jeu de valeurs initiales n°2	252
C.2	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_2 , minimisation avec bornes pour $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$, cas test n°1, jeu de valeurs initiales n°2	253
C.3	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, filtre de Kalman étendu, cas test n°1, jeu de valeurs initiales n°2	254
C.4	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , minimisation avec bornes pour $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$, cas test n°2, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	255
C.5	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_2 , minimisation avec bornes pour $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$, cas test n°2, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	256

C.6	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_3 , minimisation avec bornes pour $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$, cas test n°2, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	257
C.7	Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, filtre de Kalman étendu, cas test n°2, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2	258
C.8	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°1	259
C.9	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°1	260
C.10	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°1	260
C.11	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°2	261
C.12	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°2	261
C.13	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations <i>behavioural</i> , cas test n°2	262
C.14	Densités de probabilité des six paramètres, fonction \mathcal{L}_s , cas test n°1	263
C.15	Densités de probabilité des six paramètres, fonction \mathcal{L}_e , cas test n°1	264
C.16	Densités de probabilité des six paramètres, fonction \mathcal{L}_f , cas test n°1	264
C.17	Densités de probabilité des six paramètres, fonction \mathcal{L}_s , cas test n°2	265
C.18	Densités de probabilité des six paramètres, fonction \mathcal{L}_e , cas test n°2	265
C.19	Densités de probabilité des six paramètres, fonction \mathcal{L}_f , cas test n°2	266
D.1	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations <i>behavioural</i>	268
D.2	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations <i>behavioural</i>	269
D.3	Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations <i>behavioural</i>	269
D.4	Écoulement non permanent : densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres, fonction de vraisemblance \mathcal{L}_s	270
D.5	Écoulement non permanent : densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres, fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e	271
D.6	Écoulement non permanent : densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres, fonction de vraisemblance \mathcal{L}_f	271

Liste des tableaux

1	Nombre de communes concernées par des arrêtés de catastrophes naturelles de 1982 à la mi-décembre 2001	5
1.1	Valeurs du coefficient de Strickler en fonction de la typologie du cours d'eau . . .	19
2.1	Valeurs critiques de d_{m_c, n_c} pour le test de Kolmogorov-Smirnov bilatéral	51
4.1	Paramètres des deux cas tests	75
4.2	Niveaux de bruit et variations moyennes de \mathbf{B} correspondantes, $\gamma = 200\ m$	77
4.3	Valeurs des paramètres à estimer servant à initialiser la minimisation	78
4.4	Valeurs initiales de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 correspondant aux jeux d'initialisation n°1 et 2, pour un niveau de bruit $\sigma = 0.024$	79
4.5	Valeurs finales de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , pour un niveau de bruit $\sigma = 0.024$, jeux d'initialisation n°1 et 2	79
4.6	Erreur relative sur l'état analysé $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.024$	80
4.7	Erreur relative sur l'état analysé $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.024$	81
4.8	Erreur relative moyenne sur les grandeurs simulées à partir de l'état analysé, $\sigma = 0.024$	85
4.9	Bornes des intervalles de variation utilisés pour les simulations Monte-Carlo . . .	91
4.10	Valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, compte-tenu de la taille des échantillons	94
4.11	Valeurs de la statistique de Kolmogorov d_{m_c, n_c} obtenues à partir des simulations Monte-Carlo dans chaque cas, pour les trois fonctions de vraisemblance, $\sigma = 0.036$, premier tirage (cas n°1 : $Q = 390\ m^3.s^{-1}$, cas n°2 : $Q = 200\ m^3.s^{-1}$)	94
4.12	Paramètres des deux cas tests	97
4.13	Niveaux de bruit et variations moyennes de \mathbf{B} correspondantes, $\gamma = 200\ m$	97
4.14	Jeux de valeurs initiales des paramètres à estimer	98
4.15	Valeurs des contraintes introduites dans le processus de minimisation	99
4.16	Bornes des intervalles de variation utilisés pour les simulations Monte-Carlo . . .	101
4.17	Valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo dans chaque cas	101

5.1	Paramètres du cas test	109
5.2	Niveaux de bruit et erreurs induites correspondantes, sur les largeurs inondées en rive gauche \mathbf{B}^g et en rive droite \mathbf{B}^d , $\gamma = 100$	109
5.3	Valeurs du critère de Nash pour les hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit	111
5.4	Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit, $Z(x, t = 0)$ bruitée, $Q(x, t = 0)$ non bruité	111
5.5	Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit, $Z(x, t = 0)$ non bruitée, $Q(x, t = 0)$ bruité	113
5.6	Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit, $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ bruités	113
5.7	Erreurs moyennes induites par le bruitage sur la géométrie, $\sigma_{geom} = 0.006$	114
5.8	Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit, $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ bruités : $\sigma_{init} = 0.006$, géométrie bruitée : $\sigma_{geom} = 0.006$	115
5.9	Erreurs moyennes induites par le bruitage sur la géométrie, $\sigma_{geom} = 0.024$	116
5.10	Valeurs initiales et intervalles de variation utilisés dans l'algorithme de minimisation, pour $Q(x, t = 0)$ et $Q(x = x_{am}, t)$	116
5.11	Erreurs relatives moyennes sur le débit initial optimisé, obtenu par minimisation de Φ_1 pour tous les niveaux de bruit	117
5.12	Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 pour tous les niveaux de bruit	118
5.13	Erreur RMS sur la cote d'eau initiale $Z(x, t = 0)$ calculée à partir du débit initial optimisé $Q^a(x, t = 0)$	119
5.14	Erreurs relatives moyennes sur le débit initial optimisé, obtenu par minimisation de Φ_1 pour tous les niveaux de bruit, géométrie bruitée : $\sigma_{geom} = 0.006$	120
5.15	Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 pour tous les niveaux de bruit, géométrie bruitée : $\sigma_{geom} = 0.006$	121
5.16	Intervalles de variation utilisés pour les simulations Monte-Carlo	121
5.17	Valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo, $n_c = 1000$	122
5.18	Valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, compte-tenu de la taille des échantillons	122
6.1	Informations sur les caractéristiques hydrauliques de la crue de décembre 1993	134
6.2	Liste des données recueillies sur le site de l'Aisne, d'après Raclot (2003a)	135
6.3	Caractéristiques des zones d'étude (site de la Lèze)	136

6.4	Informations sur les caractéristiques hydrauliques des crues synthétiques, stations de Lézat-sur-Lèze et Labarthe-sur-Lèze	141
6.5	Informations sur les caractéristiques hydrauliques des crues de 1977 et de juin 2000, stations de Lézat-sur-Lèze et Labarthe-sur-Lèze	141
6.6	Synthèse des données recueillies pour chaque site	142
7.1	Récapitulatif des paramètres connus et reconstitués par l’approche “géométrie équivalente”	146
7.2	Valeurs initiale et finale (après assimilation) de la fonction coût Φ_1	147
7.3	Initialisation de l’algorithme de minimisation et valeurs optimales des paramètres recherchés	148
7.4	Bornes des intervalles de variation, pour les simulations Monte-Carlo, des paramètres invariants en x	150
7.5	Valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo, nombre de simulations <i>behavioural</i> $n_c = 1000$ pour un total de 10000 simulations	152
7.6	Valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, compte-tenu de la taille des échantillons	152
7.7	Récapitulatif des paramètres connus et reconstitués	155
7.8	Initialisation de l’algorithme de minimisation et valeurs optimales des paramètres recherchés	156
7.9	Valeurs initiale et finale (après assimilation) de la fonction coût Φ_1	157
7.10	Récapitulatif des paramètres connus et reconstitués, cas de l’Aisne	159
8.1	Nombre total de sections en travers pour les trois zones d’étude	163
8.2	Pente du fond du lit pour les trois zones d’étude, calculée à partir de données in situ	163
8.3	Récapitulatif des paramètres connus et reconstitués, cas de la Lèze	164
8.4	Valeurs initiale et finale (après assimilation) de la fonction coût Φ_1 , pour les quatre crues, zone 3	164
8.5	Initialisation de l’algorithme de minimisation et valeurs optimales des paramètres invariants le long du tronçon, zone 3	166
8.6	Initialisation de l’algorithme de minimisation et intervalles des valeurs optimales des paramètres variants le long du tronçon, zone 3	166
8.7	Valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo, nombre de simulations <i>behavioural</i> $n_c = 1000$ pour un total de 10000 simulations, zone 3, crue de temps de retour 15 ans	170
8.8	Valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, compte-tenu de la taille des échantillons sur la zone 3	171

8.9	Simulation d'une crue à partir de la géométrie calibrée sur une autre crue : erreur sur les grandeurs simulées, zone 3	173
8.10	Récapitulatif des paramètres connus et optimisés lors des étapes n°1 et 2	176
8.11	Valeurs initiale et finale (avant et après l'étape n°2) de la fonction coût Φ_1 , zone 3	176
8.12	Initialisation de l'algorithme de minimisation et valeurs optimales des paramètres estimés lors de l'étape n°2, zone 3	177
8.13	Erreur sur les grandeurs simulées, zone 3, simulation d'une crue à partir de la géométrie construite en deux étapes ; étape n°1 : profil en travers à quatre pentes identifié à partir de la crue de temps de retour 15 ans, étape n°2 : changement de pente dans le lit majeur identifié à partir de la crue de juin 2000	178
8.14	Récapitulatif des paramètres connus et optimisés (étapes n°1 et 2), cas de la Lèze	180
B.1	Valeurs de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 avant optimisation	210
B.2	Valeurs finales de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , après optimisation	211
B.3	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.006$	212
B.4	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.012$	213
B.5	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.018$	213
B.6	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.024$	214
B.7	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.030$	214
B.8	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.036$	215
B.9	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°2, $\sigma = 0.006$	215
B.10	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°2, $\sigma = 0.012$	216
B.11	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°2, $\sigma = 0.018$	216
B.12	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°2, $\sigma = 0.024$	217
B.13	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°2, $\sigma = 0.030$	217
B.14	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°2, $\sigma = 0.036$	218
B.15	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.006$	219
B.16	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.012$	219
B.17	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.018$	220
B.18	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.024$	220
B.19	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.030$	221
B.20	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.036$	221
C.1	Valeurs de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 avant optimisation	240
C.2	Valeurs finales de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , après optimisation	241
C.3	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.006$	242
C.4	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.012$	243
C.5	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.018$	243
C.6	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.024$	244
C.7	Erreur relative sur les valeurs estimées δ_x^a , cas n°1, $\sigma = 0.030$	244

C.8	Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.036$	245
C.9	Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.006$	245
C.10	Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.012$	246
C.11	Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.018$	246
C.12	Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.024$	247
C.13	Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.030$	247
C.14	Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.036$	248
C.15	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.006$	249
C.16	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.012$	249
C.17	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.018$	250
C.18	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.024$	250
C.19	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.030$	251
C.20	Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.036$	251
E.1	Simulation d'une crue à partir de la géométrie calibrée sur une autre crue : erreur sur les grandeurs simulées, zone 1	273
E.2	Simulation d'une crue à partir de la géométrie calibrée sur une autre crue : erreur sur les grandeurs simulées, zone 2	274

Nomenclature

Hydraulique

Variables

B	(m)	Largeur de la section transversale à la surface libre (largeur au miroir)
\mathbf{B}	(m)	Vecteur des largeurs au miroir le long du cours d'eau
B_0	(m)	Largeur du fond du lit (largeur au radier)
C_H	$(m^{1/2}.s^{-1})$	Coefficient de Chézy
D	$(m^3.s^{-1})$	Débitance
Fr	$(-)$	Nombre de Froude
g	$(9.81\ m.s^{-2})$	Accélération de la pesanteur
H	(m)	Hauteur d'eau moyenne comptée à partir du fond du lit
H_{lim}	(m)	Profondeur du lit mineur
I	$(m.m^{-1})$	Pente du fond du lit
J	$(m.m^{-1})$	Pente de la ligne d'énergie
K_s	$(m^{1/3}.s^{-1})$	Coefficient de Strickler
L	(m)	Longueur de la portion de cours d'eau étudiée
L_{seuil}	(m)	Largeur du seuil
ℓ	$(-)$	Étalement d'un hydrogramme de crue
m_{maj}	$(m.m^{-1})$	Pente transversale, ou fruit des berges, du lit majeur
m_{min}	$(m.m^{-1})$	Pente transversale, ou fruit des berges, du lit mineur
n	$(m^{-1/3}.s^1)$	Coefficient de Manning
$NASH$	$(-)$	Critère de Nash
P	(m)	Hauteur du seuil (hauteur de pelle)
P_w	(m)	Périmètre mouillé
Q	$(m^3.s^{-1})$	Débit
Q_b	$(m^3.s^{-1})$	Débit de base (débit initial) d'un hydrogramme de crue
Q_p	$(m^3.s^{-1})$	Débit de pointe d'un hydrogramme de crue
\mathbf{Q}	$(m^3.s^{-1})$	Vecteur des débits pendant la durée de la période étudiée
q	$(m.s^{-1})$	Débit, par unité de surface, d'apport (ou de fuite) à l'écoulement principal (modélisation 2D)
q_L	$(m^2.s^{-1})$	Débit, par unité de longueur, d'apport (ou de fuite) à l'écoulement principal (modélisation 1D)

R_H	(m)	Rayon hydraulique
S	(m^2)	Surface mouillée (aire de la section transversale occupée par le fluide)
t	(s)	Temps
t_p	(s)	Date du pic d'un hydrogramme de crue
V	($m.s^{-1}$)	Vitesse moyenne sur la verticale
x	(m)	Abscisse curviligne
Z	(m)	Cote de la surface libre
Δt	(s)	Pas de temps
Δx	(m)	Pas d'espace
δ	($-$)	Erreur relative
μ_D	($-$)	Coefficient de débit du seuil
σ	($-$)	Niveau de bruit

Exposants et indices

$(.)_{am}$	Relatif à la section amont du bief
$(.)_{av}$	Relatif à la section aval du bief
$(.)^d$ ou $(.)_d$	Relatif à la rive droite
$(.)^g$ ou $(.)_g$	Relatif à la rive gauche
$(.)_j$	A l'abscisse x_j
$(.)_M$ ou $(.)_{maj}$	Relatif au lit majeur
$(.)_m$ ou $(.)_{min}$	Relatif au lit mineur
$(.)^o$	Grandeur observée ou bruitée
$(.)^s$	Grandeur simulée

Assimilation de données

Vecteurs et opérateurs

\mathbf{d}	Vecteur d'innovation
d_{m_c, n_c}	Statistique de Kolmogorov
$E[.]$	Espérance mathématique
\mathcal{H}	Opérateur d'observation
\mathbf{H}	Application linéaire tangente à \mathcal{H}
\mathbf{I}	Matrice identité

\mathbf{K}	Matrice gain de Kalman
\mathcal{L}	Fonction de vraisemblance
\mathcal{M}	Modèle d'intégration
\mathbf{M}	Application linéaire tangente à \mathcal{M}
\mathcal{N}	Loi normale
\mathbf{P}	Matrice de variance-covariance d'erreur de l'ébauche
\mathbf{R}	Matrice de variance-covariance d'erreur d'observation
\mathbf{x}	Vecteur de l'état du système
\mathbf{y}^o	Vecteur d'observation
\mathbf{z}	Vecteur d'observation généralisé
ϵ	Erreur
σ	Écart-type
Φ	Fonction coût

Exposants et indices

$(.)^a$	“Analysed”, après assimilation
$(.)^b$	“Background”, ébauche
$(.)_{BLUE}$	Relatif au “Best Linear Unbiased Estimator”
$(.)^f$	“Forecast”, prévision
$(.)_k$	Au temps t_k
$(.)^{-T}$	Transposé
$(.)^t$ ou $(.)^v$	“True”, réel ou vrai
$(.)^z$	Relatif aux observations généralisées
$(.)^{-1}$	Inverse

Introduction générale

Contexte de l'étude

L'ampleur des dommages liés aux inondations récurrentes de ces dernières années n'est plus à démontrer (crue de l'Ouvèze en 1992 à Vaison-La-Romaine : 32 décès, 4 disparus et 500 millions de francs de pertes matérielles ; inondations de novembre 1999 dans l'Aude et les Pyrénées-Orientales : 35 morts, 1 disparu et 3.5 milliards de francs de dégâts matériels ; crue du Rhône et de ses principaux affluents en décembre 2003 : 7 victimes et des dégâts matériels estimés à plus d'1 milliard d'euros, pour ne citer que quelques exemples). Pratiquement les trois quarts des communes françaises ont fait l'objet d'au moins un arrêté de catastrophe naturelle depuis l'instauration de cette procédure en 1982 (hors tempête de décembre 1999). Certaines ont été touchées à plusieurs reprises, jusqu'à dix fois ou plus pour 420 communes. Le caractère répétitif des événements est particulièrement prononcé en matière d'inondations et de mouvements de terrain liés à la sécheresse. Près de 2 700 communes ont été inondées au moins cinq fois entre 1982 et 2003. Parmi les risques relevant des arrêtés de catastrophe naturelle (Inondations ou crues, mouvements de terrain, avalanches, séismes, ...), les plus fréquents sont les inondations ou crues (Tab. 1 et Fig. 1). Le coût moyen annuel global des dommages causés par les inondations en France se chiffre à plus de 200 millions d'euros : financièrement, elles provoquent en moyenne 75 % des dégâts occasionnés par l'ensemble des catastrophes naturelles.

Afin de bien comprendre les phénomènes mis en jeu, il est nécessaire de commencer par mettre en place un certain nombre de concepts généraux.

Définitions

L'*inondation* est à la fois¹ :

- un phénomène naturel, ou induit involontairement par des transformations artificielles du milieu, ou encore une action humaine intentionnelle ou accidentelle : le fait ou l'action d'inonder ;
- un état temporaire, résultat de ce phénomène ou de cette action.

Cette submersion affecte généralement des terrains avoisinant un cours ou un plan d'eau à niveaux variables (par exemple lit majeur et parties basses d'une vallée, plaine côtière). Elle peut être régulière, par exemple dans les zones tempérées et froides au moment de la fonte des neiges, ou bien dans les pays tropicaux, et de mousson pendant la saison des pluies, ... Elle peut être aléatoire ou accidentelle lors d'une crue produite par des pluies exceptionnelles ou par la rupture d'ouvrages. Elle se produit lorsque de l'eau en excès ne peut être évacuée par les voies naturelles (lit mineur des cours d'eau) ou artificielles prévues à cet effet (drains ou réseaux d'assainissement).

Les inondations sont le plus souvent causées par les crues des cours d'eau. Elles peuvent aussi résulter d'une lenteur, voire d'une absence, d'infiltration dans des espaces soumis à des averses de forte intensité, que les conditions "accidentelles" de l'accumulation soient d'ordre hydrologique, topographique, météorologique ou anthropique. Nombre d'inondations ou crues "pluviales" dans les villes ou des lieux rendus imperméables sont de ce type. La remontée des nappes phréatiques dans un milieu naturel ou le relèvement du niveau d'évacuation dans des réseaux de drainage peuvent encore provoquer des inondations d'un genre voisin. Parfois aussi, les différents phénomènes, crue fluviale, crue "pluviale", remontée de nappe, sont concomitants. De même, certaines villes sont particulièrement menacées, les villes littorales par exemple, quand, à toutes les causes de crue déjà esquissées, s'ajoutent les surcotes dues à des marées de tempête. Une inondation peut être décrite quantitativement par la superficie de l'aire inondée, une hauteur d'eau moyenne et une durée.

La plupart du temps, les populations se sont préférentiellement installées le long des rivières pour bénéficier de la ressource en eau. C'est pourquoi les inondations sont la cause de

¹d'après l'Office International de l'Eau avec le concours du Ministère de l'Aménagement du Territoire et de l'Environnement et du Ministère de l'Intérieur <http://www.oieau.fr/inondations/>.

nombreux dommages matériels et parfois humains. Il existe plusieurs méthodes pour réduire les conséquences des inondations : la prévention, la prévision et le développement de la culture du risque. Elles sont complémentaires et doivent être mises en oeuvre simultanément en privilégiant plutôt l'une ou l'autre en fonction du contexte local. La *prévention* va de pair avec une bonne connaissance du phénomène : il s'agit de se préparer à la survenue de l'aléa, en évaluant le risque pour mettre en place les mesures adaptées. La *prévision* concerne la prédiction de l'aléa : elle consiste à déceler l'approche du risque majeur pour pouvoir préparer, en conséquence, les actions de sauvegarde des biens et des personnes.

La notion de *risque* correspond à la combinaison de deux facteurs : aléa et vulnérabilité. L'*aléa* se rapporte à la probabilité pour qu'un phénomène naturel d'intensité donnée se produise en un lieu donné. Dans le cadre de l'élaboration d'un Plan de Prévention des Risques d'inondation, ce phénomène naturel d'intensité donnée correspond à une crue dite de référence. Il s'agit soit de la plus forte crue connue, soit de la crue centennale² si celle-ci lui est supérieure. Cette crue de référence peut être caractérisée par un ou plusieurs critères ([Préfecture de la région Languedoc-Roussillon, 2003](#)) :

- la hauteur de submersion : elle résulte d'observations, de mesures ou de modélisation. Elle est donc souvent retenue comme critère de base puisque généralement appréciable avec une bonne fiabilité ($\sim 20\text{ cm}$),
- la vitesse d'écoulement : elle est très délicate à apprécier en pratique car elle peut varier fortement sur des distances très courtes. Pour une approche régionale, la vitesse de montée des eaux est souvent retenue comme plus pertinente. En effet, elle est en relation directe avec le danger que représente la crue,
- la durée de submersion : elle est, elle aussi, délicate à apprécier et a peu d'influence sur la sécurité des personnes. En revanche, elle est en relation directe avec l'importance des dommages.

La *vulnérabilité* traduit la sensibilité d'un lieu donné à un phénomène naturel d'intensité donnée. Il y a risque lorsque ce lieu présente une occupation du sol incompatible avec l'aléa, comme une zone fortement peuplée par exemple. Une rivière qui déborde traduit un phénomène naturel présentant un caractère aléatoire : c'est la composante aléa du risque. Le fait qu'elle cause des dégâts résulte de la plus ou moins grande sensibilité du lieu où se produit le phénomène : c'est la composante vulnérabilité³.

Pour réduire les risques humains, matériels et économiques liés aux inondations, il faut mettre à la disposition des décideurs (élus, autorités administratives) des moyens objectifs pour quantifier les risques liés aux crues. En terme de connaissance de l'aléa, la priorité consiste à pouvoir caractériser l'hydrodynamique de l'écoulement : comment cet écoulement va-t-il se propager, quelles vont être les zones inondées par un débit donné, ... D'importants progrès ont récemment été réalisés dans la mise au point de modèles numériques en hydraulique, qui seraient susceptibles de fournir ce type d'information ([Stewart *et al.*, 1999](#); [Bates & De Roo, 2000](#); [Marks & Bates, 2000](#)). Mais cette modélisation se heurte au manque de données : les mesures traditionnelles, sur le terrain, sont souvent longues, coûteuses et parfois difficiles à mettre en oeuvre. Par ailleurs, certains paramètres, intervenant dans ces modèles, ne sont pas directement mesurables et doivent être calés sur des observations.

²La croyance populaire conduit à ne redouter une crue centennale qu'une fois tous les cent ans. En réalité, une crue dite centennale est un événement de période de retour de 100 ans, qui a donc, par définition, une probabilité d'occurrence de $1/100^{\text{ème}}$ chaque année.

³Pour plus d'information sur la notion de risque d'inondation, se reporter à la thèse de [Raclot \(2003a\)](#).

Risques	Nombre de communes touchées par une catastrophe naturelle	Nombre d'occurrences
Tous risques confondus	30 004	82 457
Inondations ou crues	24 269	54 672

TAB. 1 – Nombre de communes concernées par des arrêtés de catastrophes naturelles de 1982 à la mi-décembre 2001, l'“occurrence” correspond au fait, pour une commune, d'avoir été touchée une fois par un risque donné (Source : IFEN, [Institut Français de l'Environnement \(2002\)](#))

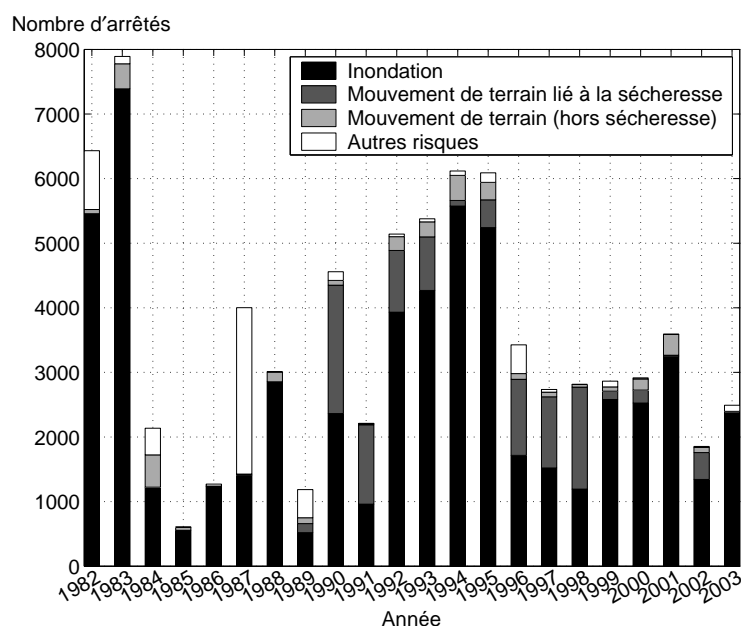


FIG. 1 – Nombre de communes déclarées en état de catastrophe naturelle depuis l'instauration de cette procédure en 1982, chaque commune est comptée autant de fois qu'elle a été déclarée en catastrophe naturelle (Les tempêtes de Noël 1999, pour lesquelles les deux-tiers du pays ont été déclarés en état de catastrophe naturelle, n'ont pas été prises en compte ici, Source : IFEN <http://www.ifen.fr/dee2003/risquesnaturels/risquesnaturels1.htm>)

Objectif de la thèse

Dans ce contexte général de manque de données nécessaires à la modélisation hydraulique, les données issues de la télédétection spatiale et/ou aérienne, en plein essor, sont à valoriser : il convient de tester leur capacité à combler ce manque d'informations, en les intégrant éventuellement avec d'autres sources de données. L'expérience acquise en météorologie et océanographie montre que les techniques d'assimilation des données fournissent un moyen efficace de combiner des modèles et des données, en prenant en compte les imperfections/incertitudes des uns et des autres. C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse : essayer d'utiliser les données fournies par la télédétection pour remonter aux paramètres nécessaires à la modélisation hydrodynamique, en s'appropriant des techniques d'assimilation de données. L'ensemble de l'étude se rattache donc au domaine plus général des problèmes inverses, notion qui sera reprise en détail au chapitre 2.

Dans une optique de gestion du risque inondation, l'apport principal des images issues de la télédétection est la détermination des surfaces inondées (Bates *et al.*, 1997). L'originalité de l'étude est de traiter des vues de dessus de la rivière montrant l'extension des eaux afin de reconstituer les paramètres nécessaires à la simulation de l'écoulement tels que le débit, le coefficient de Strickler ou bien les caractéristiques géométriques du cours d'eau. L'objectif n'est pas de se substituer complètement aux sources de données traditionnelles, comme les mesures in situ, mais plutôt de pallier le manque d'information en intégrant toutes les sources de données disponibles, et, en particulier, les données issues de la télédétection, qui constituent un apport potentiel inestimable puisque difficilement accessible par d'autres moyens de mesure.

Plan du mémoire

La première partie de ce document présente, dans un cadre général, quelques notions d'hydraulique et d'assimilation de données : le chapitre 1 revient sur la modélisation hydraulique et sur ce que la télédétection est susceptible de lui apporter, le chapitre 2 expose quelques principes de l'assimilation de données appliquée à l'estimation de paramètres. Le but n'est pas de passer en revue la totalité des méthodes de la littérature, mais plutôt de resituer dans son contexte l'ensemble de l'étude, ainsi que les méthodes qui vont être mises en pratique, afin de justifier les choix effectués.

La deuxième partie de ce document présente deux méthodologies d'estimation de paramètres (chapitre 3), qui vont être testées, à partir de données générées numériquement, sur un écoulement monodimensionnel, permanent (chapitre 4) et non permanent (chapitre 5). L'idée est de procéder étape par étape, c'est-à-dire commencer par reconstituer la géométrie du cours d'eau en régime permanent puis, la géométrie étant considérée comme connue, passer en régime non permanent pour tenter de reconstituer un hydrogramme.

Dans la troisième partie du mémoire, la méthode ayant fourni les meilleurs résultats, à l'issue de la deuxième partie, est appliquée à deux cours d'eau. Cette troisième partie a pour vocation d'évaluer le champ d'application de la méthode mise au point à partir des expériences jumelles. L'objectif de l'étude est d'estimer les paramètres recherchés à partir de données issues de la télédétection. Cependant, dans la pratique, il s'est avéré difficile d'accéder à des données de télédétection qui soient déjà traitées : cela a été possible pour un site d'étude seulement. Sur le deuxième site d'étude, les données proviennent d'autres sources de renseignement, mais elles s'apparentent néanmoins à celles que la télédétection est susceptible de fournir et permettent donc de tester la méthode d'estimation de paramètres choisie. Le chapitre 6 décrit les zones d'étude ainsi que les données disponibles sur chaque site. Pour pouvoir mettre en pratique la méthode d'estimation choisie sur un cas réel, sans se retrouver face à un nombre considérable de paramètres à estimer, il est nécessaire de faire un certain nombre d'hypothèses : écoulement permanent, géométrie simplifiée, ... Selon les données disponibles sur chacun des sites, différentes démarches ont été envisagées : reconstitution d'une rivière équivalente, introduction de la topographie du lit

majeur dans le procédé d'assimilation, ... Une analyse de sensibilité du modèle aux paramètres recherchés, ainsi qu'un calcul d'incertitude sur la prévision du modèle ont également été mis en place lorsque les résultats obtenus se sont révélés concluants. Les chapitres [7](#) et [8](#) exposent les approches mises en oeuvre sur le site de l'Aisne et sur celui de la Lèze et présentent quelques résultats.

Première partie

Synthèse bibliographique

Chapitre 1

Modélisation hydraulique et télédétection

Sommaire

1.1	Introduction	12
1.2	Les modèles hydrauliques	12
1.2.1	Typologie des modèles utilisés en hydraulique fluviale	12
1.2.1.1	Les modèles monodimensionnels	12
1.2.1.2	Les modèles à casiers	13
1.2.1.3	Les modèles bidimensionnels	14
1.2.2	Évaluation des modèles 1D et 2D pour la prédiction de l'étendue inondée	14
1.3	La modélisation filaire	16
1.3.1	Les équations de Saint-Venant monodimensionnelles	16
1.3.1.1	Expression générale	16
1.3.1.2	Régime permanent et uniforme	17
1.3.1.3	Régime graduellement varié	18
1.3.2	La rugosité	18
1.3.2.1	Le coefficient de Strickler	18
1.3.2.2	Modélisation en lit composé	19
1.4	Résolution des équations de Saint-Venant monodimensionnelles	21
1.4.1	Régime permanent	21
1.4.2	Régime non permanent, sans débit d'apport	22
1.4.2.1	Discrétisation en différences finies et linéarisation	23
1.4.2.2	Résolution des équations	25
1.5	Apport de la télédétection	26
1.5.1	Définitions	26
1.5.2	Informations accessibles	27
1.5.2.1	En période de crue	27
1.5.2.2	Hors crue	28
1.6	Conclusions	29

Les objectifs de ce chapitre sont :

- de présenter brièvement quelques méthodes, parmi les plus utilisées par les hydrauliciens, de modélisation numérique en hydraulique,
- de fournir quelques informations sur ce que la télédétection spatiale et/ou aérienne est susceptible d'apporter à cette modélisation.

Pour tout complément d'information, le lecteur peut se rapporter aux ouvrages de [Carlier \(1982\)](#) et [Chow \(1959\)](#) en ce qui concerne l'hydraulique, et à la thèse de [Raclot \(2003a\)](#) en ce qui concerne la télédétection.

1.1 Introduction

Un modèle est une représentation schématique, et donc simplifiée, d'un système réel. Modélisation hydraulique est ici entendue au sens d'équations aux dérivées partielles décrivant la propagation des eaux au sein d'un écoulement à surface libre. Il s'agit des équations tridimensionnelles de Navier-Stokes intégrées sur la verticale et simplifiées dans différentes versions des équations de Barré de Saint-Venant. Dans cette acception, qui est celle retenue dans le cadre de cette étude, les modèles hydrauliques sont des modèles déterministes, distribués et mécanistes :

- *déterministes* parce que l'ensemble des paramètres du système est supposé connu exactement. Cette catégorie de modèle est opposée à celle des modèles *stochastiques*, qui tiennent compte des incertitudes sur les paramètres en les représentant comme des variables aléatoires,
- *distribués* parce que les paramètres peuvent varier dans l'espace, contrairement aux modèles *globaux*,
- *mécanistes* (ou *physiques*) parce que les mécanismes internes du système sont décrits en se basant sur des lois physiques (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, ...). A l'opposé, les modèles *empiriques* ne font aucune référence au fonctionnement interne du système étudié.

La résolution d'un modèle hydrodynamique nécessite des données concernant la géométrie, l'hydraulique et la rugosité de l'écoulement. Parmi les données géométriques figurent la longueur du tronçon étudié, sa largeur, la forme du lit, mais également la morphologie du cours d'eau : réseau simple, ramifié, maillé (Fig. 1.1), présence de méandres, ... Les données hydrauliques concernent la hauteur d'eau, la vitesse et le débit dans les sections amont et aval du tronçon de calcul. Il est également nécessaire de connaître la rugosité en chacun des points de calcul. Bien évidemment de telles informations sont rarement disponibles : les mesures in situ restent une procédure souvent longue et coûteuse, quelquefois difficile à mettre en oeuvre et, d'un point de vue pratique, il n'est pas envisageable de mesurer les paramètres nécessaires à tous les points de calcul. De nombreuses simplifications concernant les caractéristiques du cours d'eau doivent donc être faites pour pouvoir modéliser l'écoulement. D'importants progrès ont été réalisés ces dernières années dans le domaine des techniques d'acquisition de données. En particulier, la télédétection spatiale et aérienne permet d'accéder à des informations spatialement distribuées sur de vastes domaines. Intégrer ces données spatiales ou aériennes dans la modélisation hydraulique pourrait constituer une alternative intéressante aux mesures in situ. Il s'agit cependant d'évaluer quel type d'information (paramètres, résolutions spatiale et temporelle, ...) la télédétection est susceptible de fournir, et dans quelle mesure cette information peut se révéler utile dans le cadre de la modélisation hydraulique.

1.2 Les modèles hydrauliques

Seule la modélisation mathématique (numérique) est abordée dans cette étude, il ne sera pas fait référence à la modélisation dite physique (modèle réduit). Les modèles employés résolvent les équations de Saint-Venant sous différentes formes.

1.2.1 Typologie des modèles utilisés en hydraulique fluviale

1.2.1.1 Les modèles monodimensionnels

Les hypothèses simplificatrices ainsi que les équations monodimensionnelles seront détaillées par la suite (§ 1.3). Dans les modèles monodimensionnels (1D), également appelés modèles filaires, la géométrie du cours d'eau est représentée par une succession de profils en travers eux-mêmes repérés sur un profil en long (Fig. 1.2). Les conditions aux limites nécessitent la connaissance

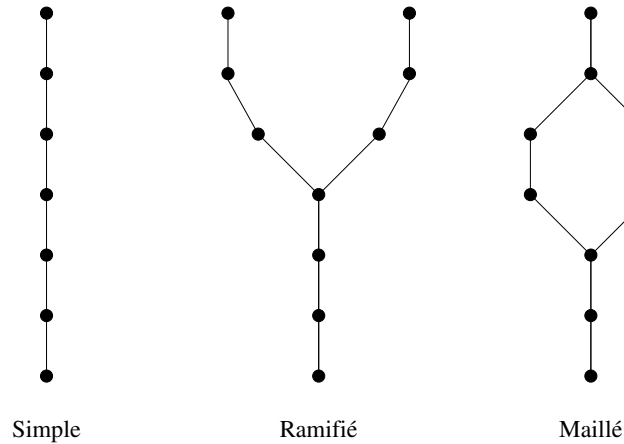


FIG. 1.1 – Quelques types de réseaux hydrauliques, ● noeud, — bief

d'un hydrogramme et d'un limnigramme. Ce type de modèle fournit le débit passant à travers chaque section (ou la vitesse moyenne dans chaque section) et la cote de la surface libre dans la section en fonction du temps.

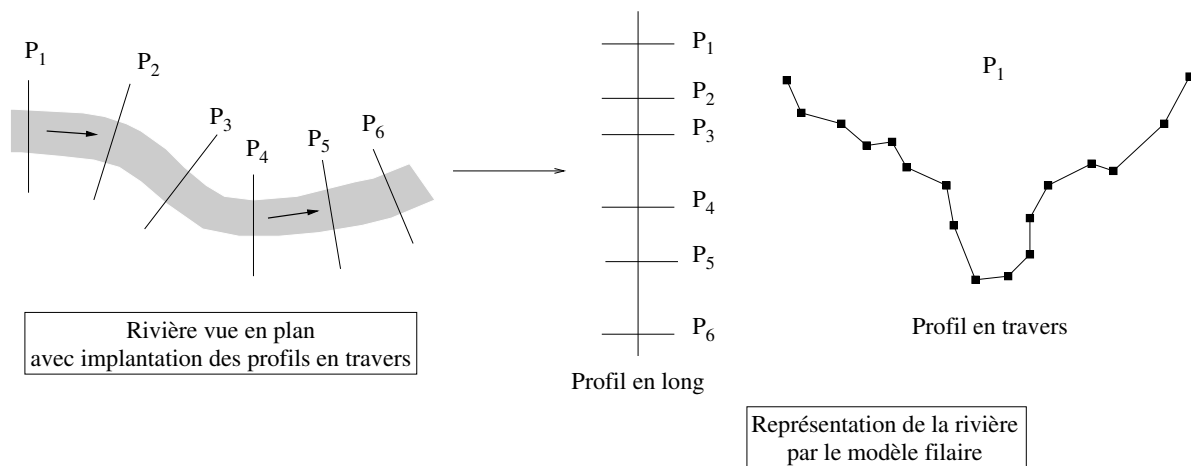


FIG. 1.2 – Représentation d'un cours d'eau par un modèle monodimensionnel

Limites des modèles monodimensionnels La représentation monodimensionnelle fournit de bons résultats pour des écoulements débordant peu du lit mineur ([Weber & Menéndez, 2004](#)). Les résultats restent satisfaisants lorsque le débordement est important, à condition que la plaine d'inondation ne présente pas de trop fortes singularités (Fig. 1.3), comme des obstacles transversaux par exemple, et que la topologie de la rivière n'évolue pas avec le débit (coupure de méandres, écoulement dans des bras normalement à sec, ...).

1.2.1.2 Les modèles à casiers

Ces modèles 1D à casiers complètent la représentation monodimensionnelle en introduisant la possibilité de modéliser des zones de stockage en cas de débordement. Ces entités, appelées *casiers*, sont reliées à l'écoulement principal et, éventuellement, entre elles par des lois d'ouvrage qui définissent leur comportement (remplissage/vidange).

Limites des modèles 1D à casiers Par rapport à une simple modélisation filaire, ces modèles permettent de prendre en compte les phénomènes de stockage de l’eau. L’échange de volume entre l’écoulement principal et les casiers latéraux est généralement représenté par une loi d’ouvrage (Ex. : déversoir, vanne, ...) ou par une loi de résistance. Cependant, le calage des coefficients régissant les lois de ces casiers est particulièrement difficile.

1.2.1.3 Les modèles bidimensionnels

Ces modèles bidimensionnels (2D) résolvent les équations de Saint-Venant 2D (Eq. 1.1 et 1.2). La géométrie du cours d’eau est représentée par un maillage 2D de la surface étudiée. Les conditions aux limites nécessitent la connaissance d’un hydrogramme, d’un profil de vitesse et d’un limnigramme. Ces modèles permettent de calculer la cote d’eau et les deux composantes du vecteur vitesse dans chaque maille en fonction du temps.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H\mathbf{V}) = q \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + g \left(\nabla Z + \frac{\mathbf{V} \parallel \mathbf{V}}{K_s^2 H^{4/3}} \right) = 0 \quad (1.2)$$

H est la hauteur d’eau (m), \mathbf{V} le vecteur vitesse ($m.s^{-1}$), de composantes V_x et V_y (vitesses moyennes sur la verticale dans les directions x et y), q représente les éventuels apports ($q \geq 0$) ou pertes ($q < 0$) au m^2 ($m.s^{-1}$), Z la cote de la surface libre (m) et K_s le coefficient de Strickler ($m^{1/3}.s^{-1}$).

Limites des modèles bidimensionnels Ce type de modèles nécessite la connaissance des paramètres pour chaque maille et non pas pour chaque profil comme en 1D. En particulier, il est très difficile d’accéder à la géométrie de la rivière de façon suffisamment fine pour que la simulation 2D soit pertinente (Rungo & Olesen, 2003). De plus, la simulation d’une crue sur toute une rivière avec un modèle 2D est peu réaliste, étant donné le temps de calcul nécessaire. Ces modèles sont souvent utilisés sur une portion de cours d’eau, lorsque la modélisation 1D est mise en défaut, ou bien pour accéder aux champs de vitesses 2D (Raclot *et al.*, 2000).

1.2.2 Évaluation des modèles 1D et 2D pour la prédiction de l’étendue inondée

Horritt & Bates (2002) ont testé les capacités de trois modèles à reproduire l’étendue de l’inondation d’une crue donnée, en ayant été calibrés à partir d’une autre crue. Les modèles utilisés se veulent représentatifs de l’évolution et des progrès réalisés dans la modélisation hydraulique. Ils reflètent le passage de l’approche monodimensionnelle, illustrée par le modèle HEC-RAS de l’U.S. Army Corps of Engineers (1997), à l’approche bidimensionnelle avec TELEMAC-2D, développé par Électricité de France (Galland *et al.*, 1991), et LISFLOOD-FP (Bates & De Roo, 2000). L’étude examine la “portabilité” de la calibration d’un modèle, d’un événement à un autre :

The paper proceeds with [...] an assessment of model performance when model calibrations are transferred between two flood events (Horritt & Bates, 2002).

Le résultat surprenant de cette étude est qu’une calibration à partir de données hydrométriques (le temps de montée de l’hydrogramme par exemple) permet au modèle 1D HEC-RAS de fournir des performances comparables à celles de TELEMAC-2D, et ce à partir d’une approche nettement moins sophistiquée. Bien sûr cette conclusion doit être considérée avec précaution, il serait nécessaire de généraliser la méthodologie à d’autres sites d’étude et à d’autres crues avant de pouvoir en tirer des conclusions. Néanmoins, ces résultats montrent la capacité des modèles 1D à prédire correctement l’étendue d’une crue dans certains cas. Horritt & Bates (2002) soulignent

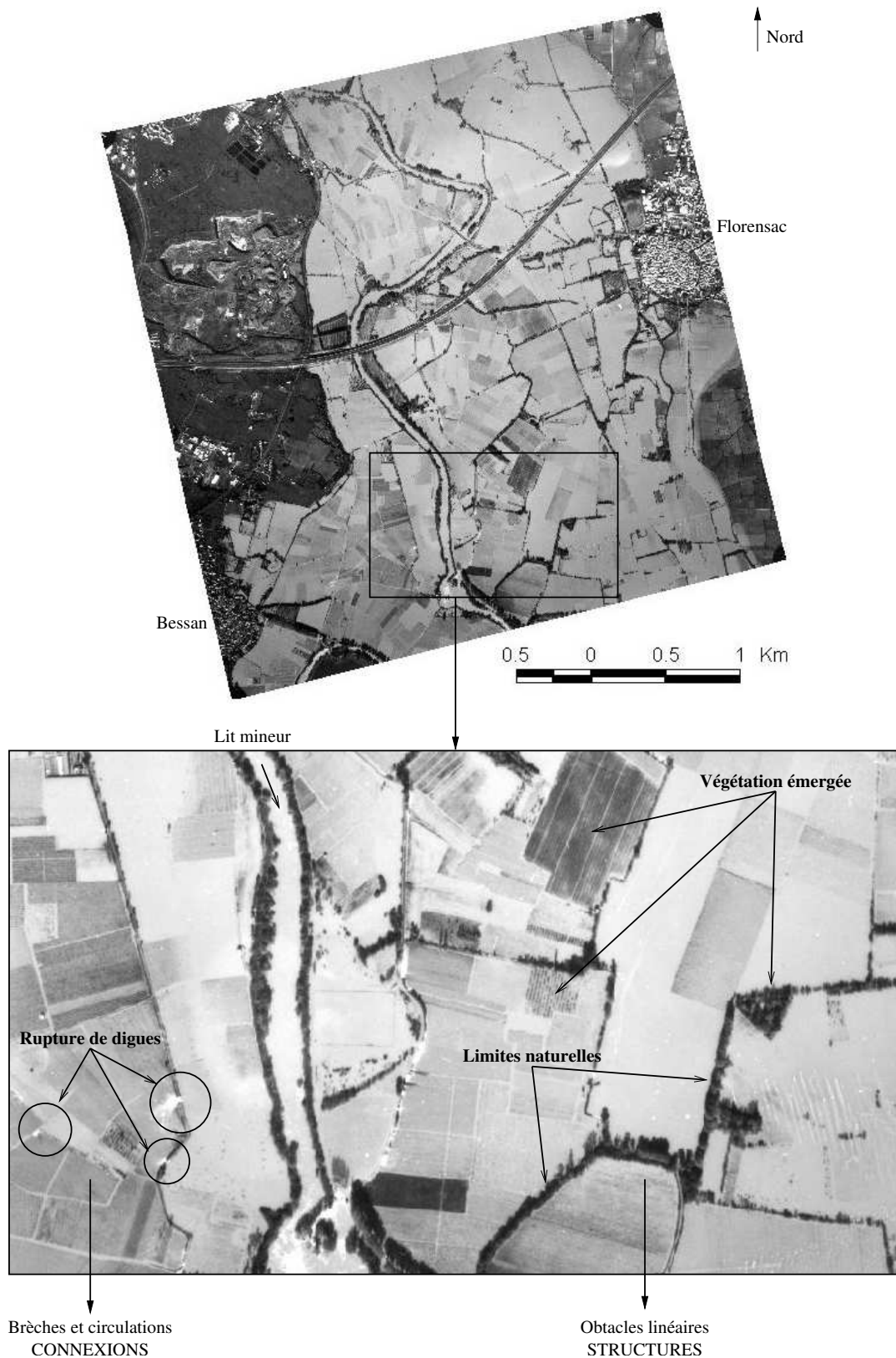


FIG. 1.3 – Exemple de plaine d'inondation présentant de fortes singularités : crue de l'Hérault le 6/11/1994, d'après [Raclot \(2003a\)](#)

par ailleurs l'importance d'une connaissance précise de la topographie dans la reconstitution de l'étendue inondée : ils font référence à un modèle numérique de terrain élaboré à partir de données LIDAR (résolution de 50 m en planimétrie et ~ 15 cm en vertical).

The results presented here should, however, be treated with caution [...]. Flow on this reach is confined to a relatively narrow valley, and we might expect more complex overbank flow patterns in wider floodplains, and in this case the 2D approach may prove more effective than 1D. [...] They do show, however, that in some cases a 1D approach may be very effective in predicting flood extent, as long as the results can be projected onto a high resolution DEM (Horritt & Bates, 2002).

1.3 La modélisation filaire

1.3.1 Les équations de Saint-Venant monodimensionnelles

1.3.1.1 Expression générale

En l'absence de singularités, les équations de Saint-Venant pour un écoulement monodimensionnel se décomposent comme suit :

- Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L \quad (1.3)$$

- Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J \right) = k_L q_L V \quad (1.4)$$

S est la surface mouillée, c'est-à-dire l'aire de la section transversale occupée par le fluide (m^2), Q est le débit ($m^3.s^{-1}$), q_L est le débit par unité de longueur ($m^2.s^{-1}$) d'apport ($q_L \geq 0$) ou de fuite ($q_L < 0$), g est l'accélération de la pesanteur ($m.s^{-2}$), Z est la cote de la surface libre (m), J est la pente de la ligne d'énergie ($m.m^{-1}$), également appelée perte de charge linéaire, k_L est un coefficient tel que

$$k_L = \begin{cases} 1 & \text{si } q_L < 0 \\ 0 & \text{si } q_L \geq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

V est la vitesse moyenne dans une section transversale ($m.s^{-1}$), x est l'abscisse curviligne (m) et t le temps (s). La figure (1.4) schématise ces différents paramètres.

Les hypothèses permettant de formuler les équations de Saint-Venant sous leur forme (1.3, 1.4) sont les suivantes (Chow, 1959) :

- L'écoulement est monodimensionnel : la cote d'eau et la vitesse sont constantes dans toute section perpendiculaire à l'écoulement,
- L'écoulement est graduellement varié le long du cours d'eau de telle sorte que la répartition de pression est hydrostatique,
- L'axe de l'écoulement est considéré comme étant une ligne droite, c'est-à-dire que le rayon de courbure de l'axe du cours d'eau est très grand,
- Les pertes par frottements (c'est-à-dire l'expression de J) peuvent être calculées à l'aide des formules d'écoulement uniforme traditionnelles comme l'équation de Manning-Strickler par exemple (cf. § 1.3.1.3),
- En cas de fuite de la partie dynamique, la vitesse est égale à la vitesse de l'écoulement. En cas d'apport à la partie dynamique, la vitesse est nulle en projection sur l'axe de l'écoulement (injection orthogonale), l'apport de quantité de mouvement est donc nul.

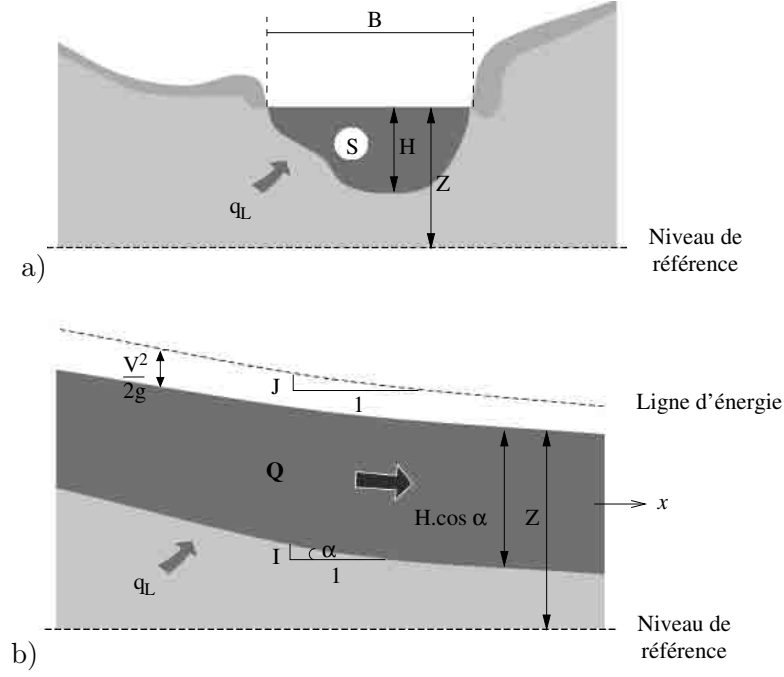


FIG. 1.4 – Définition des variables hydrauliques intervenant dans les équations de Saint-Venant, d'après Langendoen (2000) : a) profil en travers, b) profil en long

1.3.1.2 Régime permanent et uniforme

La définition du régime permanent et uniforme implique que le débit Q , la vitesse moyenne V et la hauteur d'eau H soient constants dans l'espace, c'est-à-dire le long de l'écoulement considéré, et dans le temps. Pour ce cas de figure, relativement facile à reproduire dans un canal approprié, de nombreux hydrauliciens ont tenté d'établir une relation empirique entre les paramètres géométriques du canal et la vitesse moyenne de l'écoulement. La première tentative est due à Chézy¹, sa formule générale de l'écoulement prend la forme :

$$V = C_H \sqrt{R_H I} \quad (1.6)$$

Le coefficient C_H ($m^{1/2}.s^{-1}$), souvent appelé *coefficient de Chézy*, dépend des paramètres géométriques et hydrauliques de l'écoulement, notamment de la forme de la section et de la nature des parois du canal. R_H est le rayon hydraulique (m), quotient de la surface mouillée S par le périmètre mouillé P_w , longueur de la ligne de contact entre la surface mouillée et le lit du cours d'eau : $R_H = \frac{S}{P_w}$, I est la pente du fond du lit ($m.m^{-1}$).

De nombreuses expressions du coefficient C_H ont été proposées. Quelques-unes des formes les plus usuelles sont énumérées ci-dessous :

– Formule de Bazin :

$$C_H = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_H}}} \quad (1.7)$$

γ est un paramètre représentatif de la rugosité du lit. Il varie de 0.06 pour un lit lisse (ciment) à 1.75 pour un lit en terre avec fond de galets et parois herbées. Cette formulation donne l'impression de reculer simplement d'un cran le choix apparemment arbitraire du

¹Cette formule a été établie en 1775 par Antoine Chézy, ingénieur du Pavé de Paris, à la suite des expériences auxquelles il avait procédé dans le but de déterminer les caractéristiques du canal nécessaire pour dériver les eaux de l'Yvette jusqu'à Paris (Carlier, 1982).

paramètre représentatif du lit du cours d'eau. Elle a néanmoins le mérite de mettre en évidence la faiblesse de la formule de Chézy : le rayon hydraulique R_H intervient dans plusieurs facteurs, ce qui rend malaisée l'interprétation de son influence sur la sensibilité du calcul de la vitesse moyenne (CETMEF, 2001).

- Formule de Manning :

$$C_H = \frac{1}{n} R_H^{1/6} \quad (1.8)$$

Le coefficient n ($m^{-1/3}.s$) est variable suivant la nature des parois du canal. Cette expression présente l'avantage d'avoir une forme monôme, ce qui permet une décomposition plus lisible de l'expression de la vitesse moyenne : $V = \frac{1}{n} R_H^{2/3} I^{1/2}$.

- Formule de Strickler : Strickler a cherché à déterminer la valeur du coefficient n de Manning en fonction de la dimension des matériaux constitutifs des parois du canal (cf. § 1.3.2.1). C'est à cette fin qu'il a introduit le coefficient de rugosité, dit *coefficient de Strickler*, K_s ($m^{1/3}.s^{-1}$), égal à l'inverse du coefficient n , plus maniable et donc plus couramment utilisé :

$$V = K_s R_H^{2/3} I^{1/2} \quad (1.9)$$

Parmi ces formules, celle de Manning-Strickler (Eq. 1.9) présente l'intérêt de factoriser clairement la part d'influence due à chaque élément constitutif de la vitesse de l'écoulement : la pente motrice (I), la forme de la section d'écoulement (R_H) et la rugosité de l'interface eau-lit (K_s ou n). C'est elle qui est le plus couramment utilisée par les hydrauliciens.

1.3.1.3 Régime graduellement varié

Les paramètres hydrauliques V et H varient lentement d'une section de l'écoulement à une autre. Entre deux sections de l'écoulement suffisamment proches, le régime graduellement varié est assimilable à un régime presque uniforme, auquel s'appliquerait une extrapolation de la formule de Manning-Strickler : la vitesse moyenne V n'est plus reliée à la pente du fond I , mais à la perte de charge linéaire J :

$$V = K_s R_H^{2/3} J^{1/2} \quad (1.10)$$

Cette formulation permet de calculer J dans le cas général, modélisé par l'équation (1.4) :

$$J = \frac{Q|Q|}{D^2} \quad (1.11)$$

où D est la débitance ($m^3.s^{-1}$) : $D = K_s S R_H^{2/3}$.

Le coefficient de rugosité K_s nécessite une attention toute particulière, puisqu'il est le seul pour lequel un choix a priori doit être fait.

1.3.2 La rugosité

1.3.2.1 Le coefficient de Strickler

La formule de Manning-Strickler (Eq. 1.11) fait donc apparaître la rugosité de l'interface eau-lit, à travers le coefficient K_s . De nombreux hydrauliciens (White et Colebrook, Bazin, Strickler, ...) ont tenté d'établir une formule déterministe de ce coefficient en fonction de la nature du matériau constitutif de l'interface eau-lit. Aucune n'a donné entière satisfaction, ce qui est en grande partie dû à la complexité des notions masquées derrière ce terme de rugosité. En effet, il regroupe les influences de (CETMEF, 2001) :

- la rugosité "de peau" des matériaux constitutifs du lit, c'est-à-dire la taille des aspérités de surface,

- la rugosité “de forme” de ces mêmes matériaux (arêtes tranchantes, arrondies, ...),
- la rugosité “de morphologie” liée à l’agencement des matériaux.

La combinaison de ces influences est très mal connue, ce qui rend difficile la détermination directe de K_s . Il existe également un certain nombre d’approches qui fournissent des ordres de grandeur du coefficient de Strickler en fonction du type de cours d’eau étudié, la plus utilisée étant celle de M. Pardé² (Tab. 1.1). D’autre part, il est important de rappeler que les incertitudes sur la “vraie” valeur de K_s sont telles qu’il est absurde d’écrire ce coefficient avec une précision supérieure à l’unité.

Catégories, selon les études de Pardé	K_s
Petits cours d’eau de montagne, à fond très irrégulier, largeur de l’ordre de 10 à 30 mètres.	23 à 26
Cours d’eau de montagne larges de 30 à 50 mètres, avec pentes supérieures à 0.002 et fond de gros graviers (par exemple 10 à 20 centimètres de diamètre pour beaucoup d’entre eux).	27 à 29
Rivières de largeur comparable ou supérieure, à pente comprise entre 0.0008 et 0.002, avec fond de graviers dont le diamètre extrême en général ne dépasse pas 8 à 10 centimètres (Rhin à Bâle).	30 à 33
Pente comprise entre 0.0006 et 0.0008, graviers de 4 à 8 centimètres (Rhône à Lyon).	34 à 37
Même pente mais cailloux plus petits (Rhône à la porte de Scex avant le Léman).	38 à 40
Pente inférieure à 0.0006 et supérieure à 0.00025, cailloux très petits ou sable (Danube à Vienne).	41 à 42
Cours d’eau peu turbulents, avec pente de 0.00012 à 0.00025, fond de sable et de boue (Seine, Saône, Rhin inférieur).	43 à 45
Très gros cours d’eau à très faible pente (moins de 0.00012) et fond très lisse (Volga, Danube hongrois, Mississippi inférieur).	46 à 50

TAB. 1.1 – Valeurs du coefficient de Strickler en fonction de la typologie du cours d’eau, d’après M. Pardé (Carlier, 1982)

1.3.2.2 Modélisation en lit composé

Le lit d’écoulement des cours d’eau réels n’est en général pas suffisamment homogène pour qu’un seul coefficient de Strickler puisse en décrire la rugosité de façon satisfaisante (Fig. 1.5). Il est alors possible de segmenter la section transversale en plusieurs sous-sections qui peuvent être considérées comme homogènes du point de vue de la rugosité. Des coefficients de Strickler distincts sont ensuite affectés à chacune de ces sous-sections. Plusieurs types de modélisation mettant en jeu différentes hypothèses permettent de combiner les rugosités de toutes les sous-sections.

Formule d’Einstein Cette modélisation en lit composé fait l’hypothèse de l’égalité des pentes d’énergie et des vitesses dans les différentes sous-sections transversales (Carlier, 1982), ce qui permet de calculer pour chaque section transversale un coefficient de Strickler composite, fonction

²Maurice Pardé (1893 - 1973) : Docteur ès-Lettres et ès-Sciences, professeur à la faculté des Sciences de Grenoble (École Nationale Supérieure d’Hydraulique), professeur honoraire et chargé de cours à la Faculté des Lettres et de Géographie. Il est le fondateur de la potamologie, terme désignant l’étude des fleuves et rivières, de leurs régimes et de leurs lits.

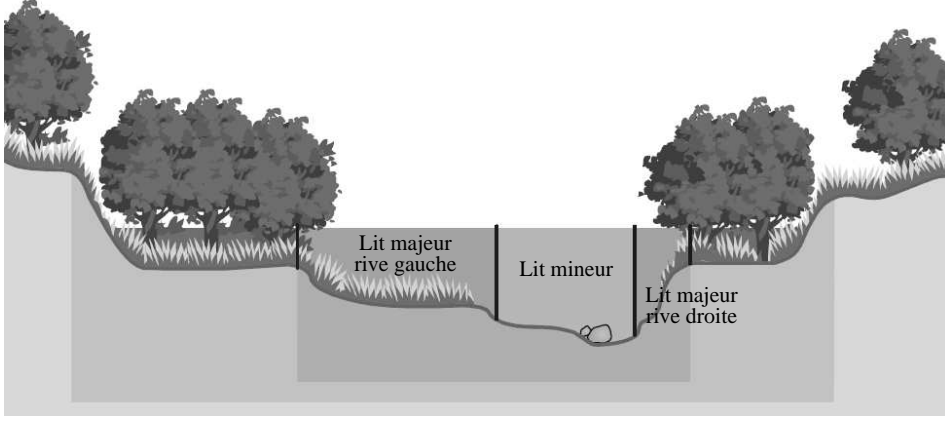


FIG. 1.5 – Lit composé, d'après Langendoen (2000)

de la hauteur d'eau :

$$K_s(H) = \left(\frac{P_w}{\sum_i \frac{P_{w_i}}{K_{s_i}^{3/2}}} \right)^{2/3} \quad (1.12)$$

P_w est le périmètre mouillé total, P_{w_i} le périmètre mouillé de la sous-section i , K_{s_i} le coefficient de Strickler de la sous-section i et i l'indice de sommation sur les différentes sous-sections.

Cette modélisation est souvent utilisée pour distinguer la rugosité des berges de celle du fond du lit mineur.

Prise en compte de la non-uniformité des vitesses dans une section transversale

Lorsque l'écoulement est débordant, la vitesse en lit mineur est souvent nettement supérieure à la vitesse en lit majeur (Nicollet & Uan, 1979), l'hypothèse d'une vitesse uniforme dans une section transversale n'est donc plus acceptable. Il est alors nécessaire de réécrire le système (1.3, 1.4) pour chacun des deux lits. Ce qui donne les équations suivantes, en l'absence de débit latéral :

$$\text{Lit mineur (m)} : \begin{cases} \frac{\partial S_m}{\partial t} + \frac{\partial Q_m}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_m^2}{S_m} \right) + g S_m \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J_m \right) + \gamma_{m,M} = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\text{Lit majeur (M)} : \begin{cases} \frac{\partial S_M}{\partial t} + \frac{\partial Q_M}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q_M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_M^2}{S_M} \right) + g S_M \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J_M \right) + \gamma_{M,m} = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

L'indice m désigne les variables relatives à l'écoulement en lit mineur, l'indice M , celles relatives à l'écoulement en lit majeur. Le terme $\gamma_{m,M} = -\gamma_{M,m}$ représente l'interaction, a priori inconnue, entre les deux lits. Les équations (1.13) et (1.14) conservent l'hypothèse fondamentale : la cote de la surface libre Z est la même en lit mineur et en lit majeur, ce qui revient à dire que la surface libre est horizontale dans une section droite. En sommant ces deux systèmes, et en appelant $Q = Q_m + Q_M$ le débit total et $S = S_m + S_M$ la section mouillée, le système résultant s'écrit :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} \right) + g S \frac{\partial Z}{\partial x} + g (S_m J_m + S_M J_M) = 0 \quad (1.16)$$

J_m et J_M vérifient l'équation de Manning-Strickler (1.11), $J_m = \frac{Q_m |Q_m|}{D_m^2}$ et $J_M = \frac{Q_M |Q_M|}{D_M^2}$, avec $D_m = K_{s_m} S_m R_{H_m}^{2/3}$ et $D_M = K_{s_M} S_M R_{H_M}^{2/3}$, les débitances en lit mineur et lit majeur respectivement. Ce système permet de définir une pente d'énergie globale telle que

$$SJ = S_m J_m + S_M J_M \quad (1.17)$$

Pour tenir compte de la non-uniformité des vitesses, il est nécessaire d'introduire un coefficient β , adimensionnel :

$$\beta = \frac{S}{Q^2} \int_S v^2 dS \quad (1.18)$$

v est la vitesse locale. Dans l'expression (1.4), la vitesse étant considérée comme uniforme au sein de la section S , ce coefficient a implicitement été pris égal à 1 : $\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{S} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right)$. Les variations de la vitesse réelle de l'écoulement induisent un coefficient β non plus égal à 1 mais satisfaisant la relation :

$$\begin{aligned} \beta \frac{Q^2}{S} &= \frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} \\ \Rightarrow \beta &= \frac{S}{Q^2} \left(\frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le système d'équations à résoudre (1.15, 1.16) a donc 4 inconnues : Q , Z , Q_m et Q_M . Une relation supplémentaire entre les différents débits est évidente :

$$Q = Q_m + Q_M \quad (1.20)$$

Une solution simple pour obtenir la relation manquante est de faire l'hypothèse que les pentes d'énergie sont les mêmes en lit mineur et en lit majeur, ce qui revient à poser :

$$\frac{Q_m}{S_m} = \frac{Q_M}{S_M} \quad (1.21)$$

Cette solution a l'avantage d'être facilement généralisable à un lit composé quelconque, possédant plus de deux sous-sections ayant des rugosités différentes. Cependant, supposer les pentes d'énergie identiques en lit mineur et en lit majeur revient à négliger les interactions entre chaque lit. En pratique, il existe un échange de quantité de mouvement à l'interface entre lits mineur et majeur, principalement dû au gradient de vitesse et à la non-uniformité des sections (Fig. 1.6). D'autres approches plus complexes, comme la modélisation "DEBORD" par exemple (Nicollet & Uan, 1979), permettent de fermer le système en prenant en compte ces interactions.

1.4 Résolution des équations de Saint-Venant monodimensionnelles

1.4.1 Régime permanent

En régime permanent, le système d'équations différentielles précédent (1.3 et 1.4) se réduit à :

$$\frac{dQ}{dx} = q_L \quad (1.22)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \left(\frac{dZ}{dx} + J \right) = k_L q_L V \quad (1.23)$$

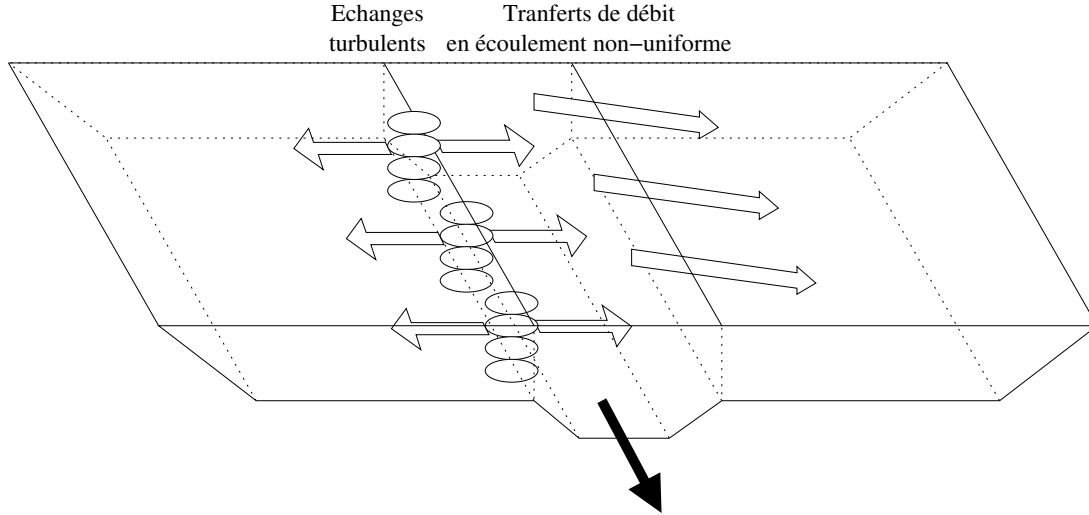


FIG. 1.6 – Échanges de quantité de mouvement entre lits mineur et majeur, d'après Bousmar & Zech (1999)

Il admet comme solution le couple (1.24, 1.25) :

$$\frac{dQ}{dx} = q_L \quad (1.24)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{I - J - (2 - k_L) Fr^2 \frac{S}{BQ} q_L}{1 - Fr^2} \quad (1.25)$$

H est la hauteur d'eau moyenne comptée à partir du fond du lit (m), I est la pente du fond ($m.m^{-1}$), J est la pente de la ligne d'énergie ($m.m^{-1}$), calculée à l'aide de la formule de Manning-Strickler (Eq. 1.11), Fr est le nombre de Froude : $Fr^2 = \frac{Q^2 B}{gS^3}$ et B est la largeur au miroir, c'est-à-dire la largeur de la section transversale à la surface libre (m).

Les équations sont du premier ordre en x , une seule condition à la limite est donc nécessaire pour chaque variable Q et H . Lorsque l'écoulement étudié est infracritique³ ($Fr < 1$), cette condition doit être donnée à la limite aval du tronçon considéré. A l'inverse, si l'écoulement est supercritique⁴ ($Fr > 1$), elle doit être donnée à la limite amont.

La méthode de Runge-Kutta, à l'ordre 3 ou 4, est la méthode généralement employée pour résoudre le système d'équations différentielles (1.24, 1.25).

1.4.2 Régime non permanent, sans débit d'apport

Les équations de Saint-Venant pour un écoulement monodimensionnel sans débit d'apport et/ou de fuite deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Il n'existe de solution analytique aux équations de Saint-Venant que sous certaines conditions de simplification drastiques. Dans la plupart des cas, les méthodes numériques constituent

³Le terme "fluvial" est également utilisé

⁴Le terme "torrentiel" est également utilisé

l'unique moyen de calcul des variables de l'écoulement. Les plus communément utilisées peuvent être regroupées dans les catégories suivantes :

- Les méthodes explicites : le schéma de discrétisation de Wendroff est un exemple de schéma explicite,
- Les méthodes implicites, comme le schéma de Preissmann. Les méthodes implicites aboutissent à des équations différentielles qui peuvent ensuite être résolues de différentes façons, par la méthode de Newton-Raphson, celle de Gauss ou encore la méthode de plus grande pente,
- La méthode des caractéristiques,
- La méthode des éléments finis, comprenant plusieurs variantes autour de la méthode classique de Galerkin.

Les paragraphes suivants, (1.4.2.1) et (1.4.2.2), présentent un exemple de résolution du système d'équations (1.26), à partir d'une méthode de différences finies utilisant le schéma de Preissmann. Les calculs afférents à cette méthode sont exposés en détail à l'annexe A.

1.4.2.1 Discrétisation en différences finies et linéarisation

Schéma de discrétisation : le schéma implicite de Preissmann Ce schéma de discrétisation a été largement utilisé par de nombreux scientifiques et a fourni des résultats satisfaisants. Il présente les avantages d'être simple, robuste et implicite en temps, ce qui permet de fixer des pas de temps importants et de réduire ainsi le temps de calcul.

Le schéma de Preissmann généralisé (Fig. 1.7) discrétise toute fonction f des équations différentielles de Saint-Venant et ses dérivées spatiale et temporelle au point $P(x, t)$ de la façon suivante :

$$f|_P = \theta \left[\psi f_{j+1}^{n+1} + (1 - \psi) f_j^{n+1} \right] + (1 - \theta) \left[\psi f_{j+1}^n + (1 - \psi) f_j^n \right] \quad (1.27)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_P = \psi \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n}{\Delta t} + (1 - \psi) \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} \quad (1.28)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P = \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \quad (1.29)$$

où j est l'indice d'espace indiquant l'emplacement de la section en travers considérée et n l'indice temporel. θ ($0 \leq \theta \leq 1$) et ψ ($0 \leq \psi \leq 1$) sont les poids temporel et spatial respectivement. Dans le schéma de Preissmann (1961) original, le poids spatial ψ est pris égal à $\frac{1}{2}$, d'où les expressions de f et de ses dérivées :

$$f|_P = \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \frac{f_{j+1}^n + f_j^n}{2} \quad (1.30)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_P = \frac{1}{2} \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} \quad (1.31)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P = \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \quad (1.32)$$

Lorsque $\psi = \frac{1}{2}$, le schéma de Preissmann est inconditionnellement stable pour $\theta > \frac{1}{2}$ (Lyn & Goodwin, 1987). L'influence du coefficient θ sur la précision du calcul a été étudiée notamment par Fread (1974), qui montre que la précision du calcul est maximale lorsque $\theta = \frac{1}{2}$ et diminue

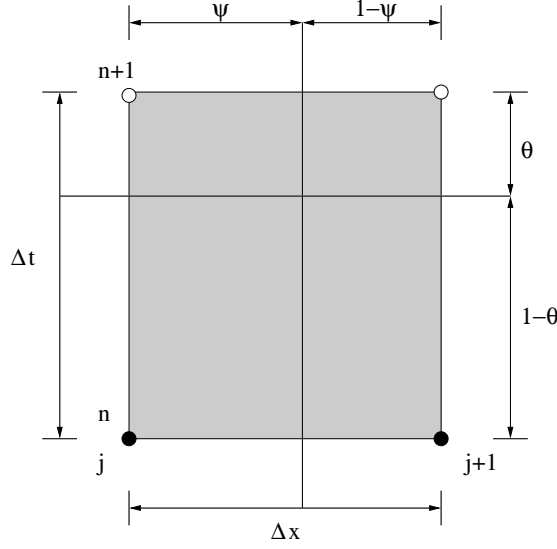


FIG. 1.7 – Schéma implicite de Preissmann

lorsque θ augmente. Cependant [Baltzer & Lai \(1968\)](#) ont observé l'apparition d'instabilités pour $\theta = \frac{1}{2}$, c'est pourquoi [Szymkiewicz \(1993\)](#) préconise une valeur de $\theta = \frac{2}{3}$. Par la suite, les notations suivantes seront adoptées :

$$\begin{aligned}\Delta Q_{j+1} &= Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n \\ \Delta Q_j &= Q_j^{n+1} - Q_j^n \\ \Delta Z_{j+1} &= Z_{j+1}^{n+1} - Z_{j+1}^n \\ \Delta Z_j &= Z_j^{n+1} - Z_j^n\end{aligned}$$

Discrétisation de l'équation de continuité L'équation de continuité de la masse est la suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.33)$$

Or, dans une section en travers, $\left. \frac{\partial S}{\partial H} \right|_x = B$, ce qui permet de réécrire l'équation (1.33) :

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.34)$$

D'où la discrétisation :

$$\begin{aligned} & \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} + \\ & \left[\theta \frac{B_{j+1}^{n+1} + B_j^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \frac{B_{j+1}^n + B_j^n}{2} \right] \left[\frac{1}{2} \frac{Z_{j+1}^{n+1} - Z_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{Z_j^{n+1} - Z_j^n}{\Delta t} \right] = 0 \\ & \theta \Delta Q_{j+1} + \frac{\Delta x}{4\Delta t} (B_{j+1}^n + B_j^n) \Delta Z_{j+1} = \theta \Delta Q_j - \frac{\Delta x}{4\Delta t} (B_{j+1}^n + B_j^n) \Delta Z_j - (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Discrétisation et linéarisation de l'équation dynamique L'équation de conservation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J \right) = 0 \quad (1.36)$$

La pente de la ligne d'énergie J est calculée à l'aide de la formule de Manning-Strickler (Eq. 1.11). La relation (1.36) s'écrit alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{D^2} \right) = 0 \quad (1.37)$$

où D est la débitance ($m^3.s^{-1}$) : $D = K_s S R_H^{2/3}$, soit encore

$$Q|Q| + D^2 \times \left\{ \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{1}{gS} \times \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) \right] \right\} = 0 \quad (1.38)$$

D'où la discrétisation :

$$\begin{aligned} & \theta \frac{Q^2|_{j+1}^{n+1} + Q^2|_j^{n+1}}{2} + (1-\theta) \frac{Q^2|_{j+1}^n + Q^2|_j^n}{2} + \\ & \left[\theta \frac{D^2|_{j+1}^{n+1} + D^2|_j^{n+1}}{2} + (1-\theta) \frac{D^2|_{j+1}^n + D^2|_j^n}{2} \right] \times \\ & \left\{ \theta \frac{Z_{j+1}^{n+1} - Z_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{Z_{j+1}^n - Z_j^n}{\Delta x} + \right. \\ & \left[\frac{\theta}{2g} \left(S^{-1}|_{j+1}^{n+1} + S^{-1}|_j^{n+1} \right) + \frac{1-\theta}{2g} \left(S^{-1}|_{j+1}^n + S^{-1}|_j^n \right) \right] \times \\ & \left[\frac{1}{2} \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \right. \\ & \left. \left. \theta \frac{(QV)_{j+1}^{n+1} - (QV)_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{(QV)_{j+1}^n - (QV)_j^n}{\Delta x} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Après linéarisation, l'équation de quantité de mouvement peut se mettre sous la forme

$$CL.\Delta Q_{j+1} + CM.\Delta Z_{j+1} = CN.\Delta Q_j + CO.\Delta Z_j + CP \quad (1.40)$$

où CL , CM , CN , CO et CP sont des coefficients dépendant des paramètres géométriques et hydrauliques (Voir calcul détaillé Annexe A).

1.4.2.2 Résolution des équations

Les équations (1.35) et (1.40) peuvent être résolues de différentes façons (méthode de Newton-Raphson, méthode de Gauss, ...). Ce paragraphe présente un exemple de résolution par la méthode dite du double balayage. Le calcul s'effectue en deux phases : en partant d'une limite du bief où une loi de type

$$CR.\Delta Q + CS.\Delta Z = CT \quad (1.41)$$

est connue, la première étape consiste à calculer, à l'aide des équations (1.35) et (1.40), et pour toutes les sections de calcul, les coefficients CR_j , CS_j et CT_j des relations dites d'impédance, de la forme :

$$CR_j.\Delta Q_j + CS_j.\Delta Z_j = CT_j \quad (1.42)$$

La deuxième étape permet de déterminer les valeurs des inconnues du problème, Z et Q .

Lorsqu'une condition à la limite amont du tronçon considéré est connue, un hydrogramme $Q_{am}(t)$, par exemple, la méthode démarre à l'amont du bief. La première relation d'impédance est fournie par la condition à la limite, mise sous la forme :

$$CR_{am} \cdot \Delta Q_{am} + CS_{am} \cdot \Delta Z_{am} = CT_{am} \quad (1.43)$$

CR_{am} , CS_{am} et CT_{am} sont des coefficients définissant la loi connue. La connaissance de ces coefficients permet d'effectuer le premier balayage ("descente"), c'est-à-dire le calcul :

- des coefficients des relations de transfert (1.44), établies à partir des équations de continuité de la masse (1.35) et de la quantité de mouvement (1.40),
- des coefficients de la relation d'impédance (1.45).

Ce calcul s'effectue de proche en proche, depuis l'amont jusqu'à l'aval du tronçon considéré.

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_j \\ \Delta Z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} GA_j & GB_j \\ GD_j & GE_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta Q_{j+1} \\ \Delta Z_{j+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} GC_j \\ GF_j \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

$$CR_{j+1} \cdot \Delta Q_{j+1} + CS_{j+1} \cdot \Delta Z_{j+1} = CT_{j+1} \quad (1.45)$$

A l'aval du tronçon, la relation d'impédance, dont les coefficients ont été calculés lors de la "descente", et la condition à la limite fournissent un système de deux équations à deux inconnues qu'il est donc possible de résoudre afin de déterminer Q et Z en ce point. Le second balayage ("montée") s'effectue de l'aval vers l'amont pour calculer les inconnues, c'est-à-dire le débit Q et la cote d'eau Z , aux points intérieurs du domaine, en se servant des coefficients déterminés lors de la première phase et des équations (1.44).

1.5 Apport de la télédétection

Remote sensing, from both space and airborne platforms, offers the opportunity to collect spatially distributed data rapidly and over large areas (Schultz, 1988) without the need for costly ground surveys. This data may then be used as an input to hydraulic and hydrological models in a variety of ways (Bates et al., 1997).

Les techniques d'extraction de l'information à partir de données brutes de télédétection ne rentrent pas dans le cadre de cette étude. Les informations issues de la télédétection sont considérées comme un apport de données potentiel qu'il s'agit d'évaluer. Le but de ce paragraphe est donc uniquement de faire un bref inventaire de ce que la télédétection spatiale et aérienne est susceptible d'apporter à la modélisation hydraulique, en se basant essentiellement sur les travaux synthétiques de Bates et al. (1997); Smith (1997) ainsi que sur la thèse de Raclot (2003a).

1.5.1 Définitions

La télédétection est l'ensemble des connaissances et techniques utilisées pour déterminer des caractéristiques physiques et biologiques d'objets par des mesures effectuées à distance, sans contact matériel avec ceux-ci⁵. La télédétection moderne étant liée historiquement au développement de la photographie aérienne, le terme se rapporte à la détection d'objets par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques (par opposition aux méthodes acoustiques, gravimétriques, ...). La télédétection englobe donc tout le processus qui consiste à capter et à enregistrer l'énergie d'un rayonnement électromagnétique émis ou réfléchi, à traiter et à analyser l'information, pour ensuite la mettre en application. En télédétection spatiale, le vecteur est une plate-forme satellitaire ou aérienne et le capteur est l'instrument d'acquisition des données (Ex. : appareil photographique,

⁵Définition d'après *Terminologie de télédétection et photogrammétrie*, PUF, 1997.

radar, ...). Lorsque la source de l'énergie électromagnétique mesurée par le capteur est d'origine naturelle (Ex. : réflexion du rayonnement solaire), la télédétection est dite *passive*, si la source est artificielle (Ex. : réflexion d'ondes radar), la télédétection est dite *active*.

1.5.2 Informations accessibles

1.5.2.1 En période de crue

L'apport principal de la télédétection en période de crue est la délimitation surfacique des zones inondées.

Despite this variety of uses the most common hydraulic property studied by remote sensing is the inundation extent field (Bates et al., 1997).

Imagerie satellitaire Les nouvelles générations de satellites sont équipées de capteurs à résolution métrique : 1 m en panchromatique et 4 m en multispectral pour IKONOS-2, lancé en 1999 par les USA, 2.5 m en panchromatique et 10 m en multispectral pour SPOT-5, lancé par la France en 2002. Le satellite Quickbird, lancé en octobre 2001, acquiert des images noir et blanc à 0.6 m de résolution et des images couleurs (4 bandes) à 2.44 m de résolution. De plus, afin de répondre aux attentes croissantes des utilisateurs, d'autres projets sont en cours de réalisation : la constellation de satellites Pléiades-HR, concept proposé par le CNES, devrait être mise en orbite d'ici 2007. Il s'agit d'un système évolutif dont l'agilité et la capacité de mouvement permettront des modes d'acquisition nouveaux. L'instrument Pléiades-HR fournira des images d'une résolution de 0.7 m en panchromatique et 2.8 m en multispectral.

Les images satellites prises en contexte de crue restent rares car elles nécessitent la concomitance entre l'événement et le passage du satellite, ainsi que de bonnes conditions de prise de vue. En effet, l'imagerie optique exige notamment l'absence de couverture nuageuse, phénomène pourtant fréquent en période de crue. Le système SAR (Synthetic Aperture Radar) est capable quant à lui de percer les nuages, mais la présence de vent perturbant la surface de l'eau, et donc la réflexion du signal, est une source de confusion importante dans l'exploitation des images de zones inondées.

High resolution visible/infrared sensors such as Landsat provide good delineation of flood extent where clouds, trees or floating vegetation do not obscure the water surface. [...] Spaceborne synthetic aperture radars (SARs) are not limited by weather conditions or darkness. [...] However, emergent vegetation, trees, wind or flow turbulence can all increase radar back-scatter returns, making delineation of inundated areas problematic (Smith, 1997).

Bien que conçue à l'origine pour l'étude de la variabilité spatio-temporelle du niveau des océans, l'altimétrie satellitaire⁶ s'est révélée très utile pour la mesure des niveaux des eaux de surface (Ex. : lacs, mers fermées, très grands fleuves de largeur supérieure à 1 km, ...) en milieu continental. Elle a permis notamment de mesurer des séries temporelles de niveaux d'eau sur certains très grands fleuves comme l'Amazone (Koblinsky et al., 1993), (Birkett, 1998), le Paraná ou le Gange à partir de TOPEX/POSEIDON (Maheu et al., 2003). Dans quelques rares cas où l'intersection d'une trace de TOPEX-POSEIDON avec un de ces fleuves est située à proximité d'une station limnimétrique, il a été possible de comparer les mesures satellites avec les mesures in situ. A titre d'exemple, en effectuant une moyenne sur plusieurs années (1993-1998), l'écart-type obtenu entre ces deux mesures sur le fleuve Paraguay, à Forte Coimbra, est de l'ordre de 20 cm (Mechoso, 2003). Koblinsky et al. (1993) se sont quant à eux intéressés aux mesures effectuées

⁶Missions TOPEX/POSEIDON, lancée en août 1992, ERS-1 et ERS-2 lancées respectivement en juillet 1991 et avril 1995, JASON, lancée en décembre 2001 ou encore ENVISAT, lancée en Mars 2002.

par la mission Geosat⁷ sur le fleuve Amazone. Ils estiment à 10 cm RMS la précision sur le niveau d'eau estimé :

Our results suggest that radar altimeters may be feasible for routinely making estimates of river levels with an accuracy of the order of 10 cm rms (Koblinsky et al., 1993).

Imagerie aérienne L'imagerie aérienne, qui a su se diversifier, présente l'avantage, par rapport à la télédétection satellitaire, de faire preuve d'une plus grande flexibilité aussi bien spatiale que temporelle. Avec la photographie oblique, par exemple, la réactivité face aux événements n'est plus une contrainte majeure, sachant de plus que le vol peut être effectué sous les nuages. En contrepartie, ces prises de vue obliques nécessitent une phase de prétraitement géométrique plus lourde.

Les photographies aériennes permettent l'extraction de manière fiable et précise ($< 10m$) des limites du champ d'inondation :

Delineation of the flood boundary to within 10 m from the aerial photo set is relatively straightforward. [...] Thus a map-referenced flood boundary with an accuracy of c. 10 m can be produced (Bates et al., 1997).

Il est également possible de recueillir d'autres informations, internes à la zone inondée, comme par exemple les zones de concentration des courants ou bien les points de fuite du cours d'eau. Ce genre de données nécessite une précision particulièrement fine, ce qui peut les rendre inaccessibles depuis des images numériques provenant de satellites, même avec les nouvelles résolutions métriques (Raclot, 2003b).

1.5.2.2 Hors crue

Dans le domaine de la modélisation hydraulique, l'intérêt de la télédétection réalisée en dehors des périodes de crue est de fournir des renseignements sur les caractéristiques physiques de la plaine d'inondation, c'est-à-dire sur la topographie et l'occupation du sol. Cette occupation du sol dans la plaine d'inondation peut en effet être reliée à la rugosité au moyen de tables de correspondance fournies par les manuels d'hydraulique. Cependant, il s'agit plus de contraindre ces coefficients de rugosité que de fixer leur valeur a priori en se basant uniquement sur les images satellites. En effet, plusieurs tentatives ont montré qu'étant donné les phénomènes complexes mis en jeu, une phase de calage était nécessaire :

It should be noted that friction and topography are not independent parameters and, furthermore, that this relationship is scale dependent, since the form drag associated with microtopography at subgrid scales forms part of the friction parametrization in a given model (Bates et al., 1998).

Imagerie satellitaire De façon générale, la précision altimétrique de la topographie provenant d'images satellites ayant une résolution décimétrique ne descend pas en dessous de 5 m. Les nouvelles images optiques à résolution métrique (Ex. : IKONOS) permettent d'obtenir des topographies dont la précision altimétrique est inférieure au mètre. Cependant l'altitude mesurée à partir de ces images optiques correspond en fait à un MNS (Modèle Numérique de surface) c'est-à-dire à l'altitude sol + végétation (Fig. 1.8). Dans le cas de la modélisation hydraulique, il faut alors avoir recours à des traitements plus ou moins précis pour accéder à l'altitude du sol nu ou MNT (Modèle Numérique de Terrain).

⁷Capteur de la U.S. Navy ayant opéré entre 1985 et 1989.



FIG. 1.8 – Exemple de classification sol/sursol à partir de levé laser aéroporté, Système d’Information du Territoire Neuchâtelois www.ne.ch/sitn

Imagerie aérienne Deux techniques fournissant des informations sur la topographie de la plaine d’inondation à partir de la télédétection aérienne, peuvent se révéler utiles pour les problèmes d’hydraulique :

- La photogrammétrie⁸ permet d’accéder à des précisions altimétriques et planimétriques inférieures au mètre. Cependant, lorsque le couvert végétal devient trop important, cette technique est inopérante.
- La très récente technique de laser scanner aéroporté procure le relief sous forme d’un semis de points très dense (de 0.1 à 5 points au m^2) avec une précision pouvant descendre jusqu’à 15 cm RMS. De plus, un dispositif tel que le LIDAR (Light Detection And Ranging), produit, pour chaque point, l’altitude du couvert végétal et celle du sol sous ce couvert (Fig. 1.8). En effet, le laser ayant un effet pénétrant dans la végétation, la détermination d’altitude devient possible même dans les régions densément boisées. Des algorithmes de filtrages sont utilisés pour distinguer les points au sol, au sommet du sur-sol (bâtiments, arbres, ...) et les points intermédiaires. Ces traitements sont néanmoins susceptibles d’entraîner une perte de qualité de l’information.

1.6 Conclusions

Les écoulements au sein d’un cours d’eau sont particulièrement complexes et la compréhension actuelle de ce type de système est loin d’être complète (Singh, 2004). Néanmoins, le développement de modèles décrivant des phénomènes de plus en plus complexes ainsi que les progrès réalisés en matière de capacité informatique font de la modélisation hydraulique un outil de plus en plus intéressant, en particulier dans le domaine de l’analyse et de la gestion du risque inondation. Le choix de la “bonne” structure du modèle est un problème particulièrement délicat puisque c’est cette structure qui définit le fonctionnement spatial du modèle et donc l’aptitude de ce dernier à représenter le système physique réel.

Outre la compréhension du système et la capacité informatique, une importante limitation de la modélisation est le manque de données. Lorsque les informations nécessaires à la modélisation ne sont pas disponibles, il n’est pas rare de considérer que la géométrie du cours d’eau est

⁸Science et art dont le sujet d’étude est la photographie dans l’intention de recueillir des données conduisant à des restitutions dimensionnelles et de déterminer la forme et la position d’un objet dans l’espace. Définition d’après *Terminologie de télédétection et photogrammétrie*, PUF, 1997.

uniforme et la rugosité homogène tout le long du tronçon considéré. La télédétection est à présent à même de fournir un certain nombre d'informations, comme l'étendue de la zone inondée, la topographie et l'occupation du sol de la zone hors d'eau, qui pourrait être utilisé avec profit afin de pallier ce problème. Cependant, il n'est pas toujours possible d'accéder directement aux paramètres nécessaires à partir des images de télédétection. Lorsqu'une estimation immédiate est impossible, il est nécessaire de mettre en oeuvre des méthodes inverses.

Chapitre 2

Assimilation de données appliquée à l'estimation de paramètres

Data assimilation / model updating is a highly recommended strategy for real-time forecasting or nowcasting applications (Beven, 2004).

Sommaire

2.1	Introduction	33
2.2	La théorie de l'estimation	35
2.2.1	Approche simplifiée	35
2.2.1.1	Première approche : minimisation de la variance d'erreur de l'estimation	35
2.2.1.2	Deuxième approche : moindres carrés pondérés	37
2.2.2	Généralisation au cas multi-dimensionnel	37
2.2.2.1	Minimisation de la variance de l'estimateur linéaire	38
2.2.2.2	Moindres carrés pondérés	41
2.2.2.3	Opérateur d'observation non linéaire	41
2.2.2.4	Méthode de minimisation numérique	42
2.2.3	Filtre de Kalman	44
2.2.3.1	Méthodologie	44
2.2.3.2	Extension aux modèles non-linéaires : le filtre de Kalman étendu	46
2.2.3.3	Application à l'estimation de paramètres - Cas stationnaire	47
2.3	Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur la prévision	48
2.3.1	Generalized Sensitivity Analysis (GSA)	48
2.3.1.1	Introduction	48
2.3.1.2	Méthodologie de l'analyse de sensibilité généralisée	49
2.3.2	Generalized Likelihood Uncertainty Estimation (GLUE)	52
2.3.2.1	Introduction	52
2.3.2.2	Définition d'une fonction de vraisemblance	53
2.3.2.3	Distribution des paramètres <i>a priori</i>	54
2.3.2.4	Estimation de l'incertitude	54
2.3.2.5	Sensibilité à un paramètre	55
2.3.2.6	Mise à jour de la vraisemblance en présence de nouvelles observations	56
2.3.2.7	Évaluation de l'apport des nouvelles observations	56
2.4	Principales difficultés liées à l'assimilation de données en hydraulique	58
2.4.1	Détermination des erreurs	58
2.4.2	Non-linéarité du modèle	59
2.5	Conclusions	60

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques possibilités existantes d'aborder un problème inverse, concept qui sera également défini dans ce chapitre. Les méthodes exposées ici sont les suivantes :

- un ensemble d'approches des problèmes inverses, regroupé sous le terme générique d'assimilation de données et basé sur les théories de l'estimation et du contrôle optimal,
- une approche probabiliste, basée sur le concept d'équifinalité et utilisant une méthode de type Monte-Carlo¹.

Pour tout complément d'information, le lecteur peut se rapporter au cours de [Bouttier & Courtier \(1999\)](#) sur l'assimilation de données, et aux travaux de Beven ([Beven & Binley, 1992](#); [Beven, 2001](#); [Beven & Freer, 2001](#); [Beven, 2004](#), ...) pour tout ce qui a trait au concept d'équifinalité.

¹Toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires est appelée méthode de Monte-Carlo.

2.1 Introduction

Pour reproduire le fonctionnement d'un système physique, il est nécessaire de le modéliser. Afin de simuler le comportement de ce système, c'est-à-dire la (ou les) *sortie(s)*, le modèle va nécessiter la connaissance d'un certain nombre de paramètres ou *entrées* du système. Connaissant ces entrées et la modélisation du système physique choisie, il est possible de calculer les sorties correspondantes : c'est le *problème direct*.

Le *problème inverse* consiste alors à rechercher des informations sur les entrées du système connaissant les sorties et la modélisation employée. Différentes approches possibles des problèmes inverses peuvent être regroupées sous le terme générique d'*assimilation de données* dont l'objectif est de caractériser l'état d'un système physique donné en utilisant toutes les sources d'information disponibles (McLaughlin, 2002).

Hadamard (1932) définit les conditions suivantes pour qu'un système d'équations soit "bien posé" :

- la solution doit exister,
- la solution doit être unique une fois fixées les conditions aux limites du problème,
- la solution doit être stable. La notion de stabilité telle qu'elle est employée ici concerne les effets induits sur l'estimation des paramètres par les erreurs sur les observations, comme expliqué ci-après.

Si une ou plusieurs de ces conditions ne sont pas satisfaites, le problème est alors considéré comme étant "mal posé". Estimer les variables d'état² d'un système d'équations à partir des variables de sortie³ conduit généralement à un problème "mal posé" (Khatibi, 1989). En effet, chercher à estimer, par exemple, un coefficient de Strickler constant sur un tronçon de rivière à partir de cotes d'eau mesurées en plusieurs points va se ramener à résoudre un système dans lequel le nombre d'équations dépassera largement le nombre d'inconnues. Il n'y a alors pas de solution exacte mais il est possible d'identifier une solution optimale (dans un sens à préciser), en utilisant des techniques d'assimilation de données.

La mise en oeuvre de ces techniques d'optimisation présente de nombreux écueils potentiels que Khatibi *et al.* (2001) séparent en trois catégories, identifiabilité, unicité et stabilité :

- la solution du problème est *identifiable* si une importante variation du paramètre recherché ne conduit pas à une variation très faible des variables de sortie. L'identifiabilité d'un paramètre peut être testée au moyen d'une analyse de sensibilité du modèle considéré à ce paramètre : si le modèle y est très sensible, le paramètre en question sera vraisemblablement identifiable,
- la solution est *unique* si l'estimation d'un paramètre à partir de jeux d'observations différents donne toujours le même résultat. Cette condition d'unicité est remise en question par le concept d'équifinalité qui sera développé par la suite (§ 2.3),
- la solution est *stable* si de petites erreurs dans les observations n'entraînent pas de grands changements de la valeur estimée.

Le fait que le problème soit "mal posé" rend particulièrement délicate la recherche d'une solution optimale. Beven & Freer (2001) soulignent :

In such cases, the inverse problem will not be well posed and identification of an optimal solution will be neither easy nor robust to change of data [...]. This, in itself, should not be sufficient to reject the idea of an optimal model [...]. The concept of the optimal model should be seriously questioned.

Ces limitations du concept de jeu de paramètres optimal mettent en évidence l'existence d'une équifinalité :

²Dans la terminologie du contrôle optimal, ce sont les variables qui décrivent le comportement du système.

³Dans la terminologie du contrôle optimal, ce sont des fonctions observables des variables d'état.

It may be endemic to mechanistic modelling of complex environmental system that there are many different model structures and many different parameters sets within a chosen model structure that may be behavioural or acceptable in reproducing the observed behaviour of that system. This has been called the equifinality concept (Beven & Freer, 2001).

Il sera nécessaire d'en tenir compte dans l'évaluation des résultats obtenus, à travers notamment une analyse de sensibilité du modèle aux différents paramètres, ainsi qu'une estimation de l'incertitude liée à la prévision fournie par le modèle à partir du jeu de paramètres optimal. La méthodologie de cette expertise sera abordée plus en détails au paragraphe (2.3).

Parmi les méthodes principales d'assimilation de données, deux classes sont en général distinguées (Fig. 2.1) :

- Les méthodes séquentielles, basées sur la théorie de l'estimation statistique optimale, apportent une correction au modèle chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible. Les principales techniques séquentielles sont le filtre de Kalman, qui résout de manière exacte le problème de l'assimilation pour un modèle linéaire (Hoteit, 2001), et ses différentes variantes,
- Les méthodes variationnelles, basées sur la théorie du contrôle optimal, consistent à minimiser la distance entre les résultats fournis par le modèle et les observations, sur une période temporelle donnée.

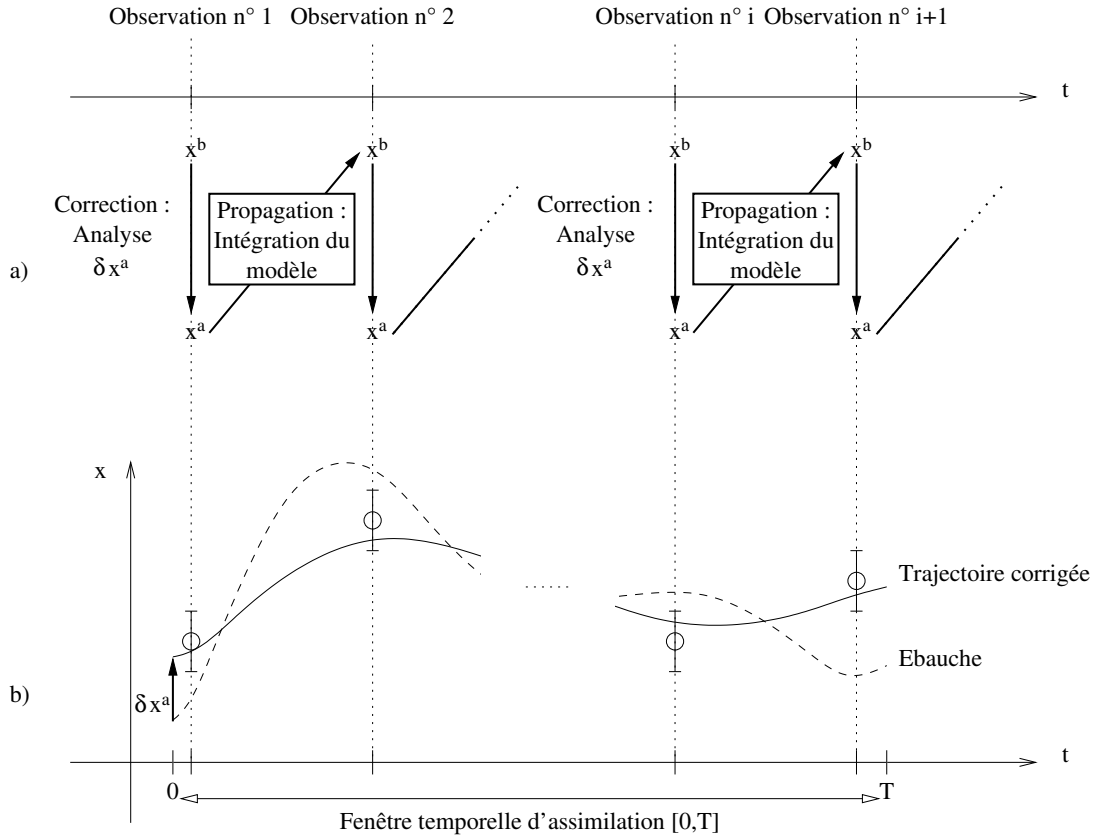


FIG. 2.1 – Principe de l'assimilation de données a) séquentielle, b) variationnelle

Les méthodes d'assimilation de données utilisées dans cette étude sont fondées sur la théorie de l'estimation. Les notations employées par la suite ont été définies par Ide *et al.* (1997).

2.2 La théorie de l'estimation

2.2.1 Approche simplifiée

Soit un mobile se déplaçant sur un axe rectiligne et dont la position est repérée par la variable réelle x . La valeur réelle x^t (t pour true) de x à un instant quelconque est inconnue, seules des mesures, effectuées par un ou plusieurs radars, sont disponibles (Desroziers, 2001; Massart, 2003).

Dans le cas où deux radars distincts fournissent chacun une mesure de position, ces deux observations peuvent s'écrire :

$$y_1^o = x^t + \epsilon_1^o \quad (2.1)$$

$$y_2^o = x^t + \epsilon_2^o \quad (2.2)$$

ϵ_1^o et ϵ_2^o sont les erreurs d'observation associées à y_1^o et y_2^o . Ces erreurs sont bien sûr inconnues mais elles sont liées aux spécifications des instruments de mesure. En particulier, il est possible de faire les hypothèses suivantes :

- Les instruments ne sont pas biaisés, c'est-à-dire que les erreurs de mesure sont en moyenne nulles. L'espérance mathématique, notée $E[\cdot]$, des erreurs ϵ_1^o et ϵ_2^o s'écrit donc :

$$E[\epsilon_1^o] = 0 \quad (2.3)$$

$$E[\epsilon_2^o] = 0 \quad (2.4)$$

- La précision de chaque radar est connue, les déviations standards sont respectivement σ_1^o et σ_2^o :

$$E[(\epsilon_1^o)^2] = (\sigma_1^o)^2 \quad (2.5)$$

$$E[(\epsilon_2^o)^2] = (\sigma_2^o)^2 \quad (2.6)$$

- Étant donné que les observations sont fournies par deux instruments différents, il est également possible de supposer que les erreurs de mesure ne sont pas corrélées :

$$E[\epsilon_1^o \cdot \epsilon_2^o] = 0 \quad (2.7)$$

2.2.1.1 Première approche : minimisation de la variance d'erreur de l'estimation

Les seules informations disponibles sur la position réelle du mobile à un instant donné étant les observations y_1^o et y_2^o , un estimateur x^a (a pour analysed, "analysé") de x^t peut être recherché sous la forme d'une combinaison linéaire de ces observations :

$$x^a = c_1 y_1^o + c_2 y_2^o \quad (2.8)$$

Les coefficients c_1 et c_2 deviennent alors les inconnues du problème.

Le meilleur estimateur x^a , au sens statistique du terme, de la position réelle du mobile x^t doit en particulier être non biaisé, c'est-à-dire que la moyenne de x^a doit être la position réelle x^t . L'espérance de l'estimateur d'erreur $\hat{x} = x^a - x^t$ est alors nulle. Or, le biais statistique de x^a par rapport à x^t peut s'écrire en fonction des deux nouvelles inconnues du problème c_1 et c_2 .

$$\begin{aligned} E[x^a - x^t] &= E[c_1 y_1^o + c_2 y_2^o - x^t] \\ &= E[c_1 (x^t + \epsilon_1^o) + c_2 (x^t + \epsilon_2^o) - x^t] \\ &= c_1 E[\epsilon_1^o] + c_2 E[\epsilon_2^o] + (c_1 + c_2 - 1) E[x^t] \\ &= (c_1 + c_2 - 1) x^t \end{aligned} \quad (2.9)$$

car $E[\epsilon_1^o] = E[\epsilon_2^o] = 0$.

L'estimateur n'est pas biaisé si la moyenne de l'estimateur d'erreur \hat{x} est nulle, il faut donc satisfaire la condition :

$$c_1 + c_2 - 1 = 0 \quad (2.10)$$

La relation (2.10) n'est pas suffisante pour définir un estimateur, il manque un autre critère pour déterminer les inconnues c_1 et c_2 .

Parmi tous les estimateurs non biaisés existants, un choix possible est celui qui minimise la variance de l'estimateur d'erreur $\hat{x} = x^a - x^t$. En effet, plus la variance de \hat{x} est faible, plus la probabilité d'être proche de la moyenne est importante.

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{x}}^2 &= E[(x^a - x^t)^2] \\ &= E[(c_1 y_1^o + c_2 y_2^o - x^t)^2] \\ &= E[(c_1 (x^t + \epsilon_1^o) + (1 - c_1) (x^t + \epsilon_2^o) - x^t)^2] \\ &= c_1^2 E[(\epsilon_1^o)^2] + (1 - c_1)^2 E[(\epsilon_2^o)^2] + 2c_1 (1 - c_1) E[\epsilon_1^o \epsilon_2^o] \end{aligned} \quad (2.11)$$

La variance de l'estimateur d'erreur est minimale lorsque sa dérivée (ici par rapport à c_1 vu 2.11) est nulle. Ce minimum est atteint pour une valeur particulière de c_1 appelée c_1^a :

$$c_1^a = \frac{(\sigma_2^o)^2}{(\sigma_1^o)^2 + (\sigma_2^o)^2} \quad (2.12)$$

L'équation (2.10) donne

$$c_2^a = 1 - c_1^a = \frac{(\sigma_1^o)^2}{(\sigma_1^o)^2 + (\sigma_2^o)^2} \quad (2.13)$$

Les coefficients c_1 et c_2 ont été déterminés en choisissant l'estimateur tel que l'erreur commise sur l'estimation soit de moyenne nulle et de variance minimale. Cet estimateur est le meilleur estimateur linéaire non biaisé ou BLUE (Best Linear Unbiased Estimator). Il est obtenu en remplaçant c_1 et c_2 dans la relation (2.8) par leurs valeurs obtenues en (2.12) et (2.13).

$$\frac{x^a}{(\sigma^a)^2} = \frac{y_1^o}{(\sigma_1^o)^2} + \frac{y_2^o}{(\sigma_2^o)^2} \quad (2.14)$$

avec

$$(\sigma^a)^2 = \frac{(\sigma_1^o)^2 (\sigma_2^o)^2}{(\sigma_1^o)^2 + (\sigma_2^o)^2} \quad (2.15)$$

ou encore

$$\frac{1}{(\sigma^a)^2} = \frac{1}{(\sigma_1^o)^2} + \frac{1}{(\sigma_2^o)^2} \quad (2.16)$$

$(\sigma^a)^2$ est la variance de l'estimateur. Si la précision est définie comme l'inverse de la variance d'erreur, alors l'équation (2.16) montre que la précision de l'estimation est égale à la somme des précisions des observations. Ce résultat reste valable quel que soit le nombre d'observations considéré. Cela signifie en particulier que chaque nouvelle mesure, quelle qu'en soit la précision, permet de réduire la variance d'erreur de l'estimation.

L'estimateur BLUE est à l'origine du filtre de Kalman, outil de base de l'approche séquentielle, développé au paragraphe (2.2.3).

2.2.1.2 Deuxième approche : moindres carrés pondérés

Sans faire aucune hypothèse supplémentaire, il est également possible de rechercher un estimateur x^a de x^t qui soit proche des observations et qui prenne en compte leur précision respective. La distance entre x^a et les observations peut être mesurée par l'expression quadratique suivante :

$$\Phi(x^a) = \frac{1}{2} \frac{(x^a - y_1^o)^2}{(\sigma_1^o)^2} + \frac{1}{2} \frac{(x^a - y_2^o)^2}{(\sigma_2^o)^2} \quad (2.17)$$

Le minimum de Φ est atteint pour

$$\frac{\partial \Phi(x^a)}{\partial x^a} = 0 \quad (2.18)$$

Or

$$\frac{\partial \Phi(x^a)}{\partial x^a} = \frac{x^a - y_1^o}{(\sigma_1^o)^2} + \frac{x^a - y_2^o}{(\sigma_2^o)^2} \quad (2.19)$$

soit

$$x^a = \frac{(\sigma_2^o)^2}{(\sigma_1^o)^2 + (\sigma_2^o)^2} y_1^o + \frac{(\sigma_1^o)^2}{(\sigma_1^o)^2 + (\sigma_2^o)^2} y_2^o \quad (2.20)$$

L'expression de x^a est la même que celle obtenue par minimisation de la variance d'erreur (Eq. 2.14). Les deux approches sont donc équivalentes dans le cas de cet exemple. Cependant, en pratique (§ 2.2.2), elles conduisent à deux algorithmes mathématiques, la détermination directe d'un gain \mathbf{K} et la minimisation d'une fonctionnelle Φ , qui ont des propriétés numériques très différentes (Bouttier & Courtier, 1999). Leur équivalence ne vaut donc que si certaines hypothèses sont vérifiées, comme la linéarité de l'opérateur d'observation \mathbf{H} par exemple. Les notions de gain et d'opérateur d'observation vont être définies ci-après, dans le cas multi-dimensionnel (§ 2.2.2).

2.2.2 Généralisation au cas multi-dimensionnel

Dans l'exemple précédent, la variable x à estimer était de dimension 1. Soit à présent un vecteur \mathbf{x} de dimension n . \mathbf{x} peut être composé

- de valeurs en un point, c'est le cas précédent (§ 2.2.1). En hydraulique il pourrait s'agir du débit en un point du cours d'eau étudié,
- de valeurs aux points de calcul (grille 1D, 2D ou 3D). Dans le domaine de l'hydraulique 1D, la profondeur du lit mineur, par exemple, doit être connue dans chaque section transversale,
- d'un ou de plusieurs paramètres, comme le coefficient de Strickler, entre autres.

Observations Les observations disponibles étant rassemblées dans un vecteur de dimension p noté \mathbf{y}^o , l'état vrai du système, c'est-à-dire les paramètres réels, est la valeur du vecteur \mathbf{x} de dimension n dont l'image par un opérateur d'observation \mathcal{H} parfait serait identique à l'état observé à partir d'instruments de mesure parfaits $\mathbf{y}_{\text{parfait}}^o$, soit

$$\mathbf{y}_{\text{parfait}}^o = \mathcal{H}(\mathbf{x}^t) \quad (2.21)$$

Étant donné que les observations ne sont jamais parfaites et que l'opérateur d'observation présente également des erreurs dues à la modélisation du processus, le vecteur de l'état observé s'exprime en fait de la façon suivante :

$$\mathbf{y}^o = \mathcal{H}(\mathbf{x}^t) + \epsilon^o \quad (2.22)$$

\mathcal{H} est l'opérateur liant les observations aux paramètres à estimer. Si l'opérateur d'observation \mathcal{H} est linéaire, alors il existe une matrice \mathbf{H} de dimension (p, n) , telle que $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x}$, soit

$$\mathbf{y}^o = \mathbf{H}\mathbf{x}^t + \epsilon^o \quad (2.23)$$

ϵ^o est un vecteur de dimension p représentant l'*erreur d'observation*. Cette erreur provient à la fois de la modélisation imparfaite de l'opérateur d'observation \mathcal{H} et des incertitudes sur les mesures.

Dans l'exemple précédent (§ 2.2.1), l'équation (2.22) se ramenait à :

$$\begin{pmatrix} y_1^o \\ y_2^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^t + \begin{pmatrix} \epsilon_1^o \\ \epsilon_2^o \end{pmatrix}$$

soit $\mathbf{y}^o = \mathbf{H}\mathbf{x}^t + \epsilon^o$ avec $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si l'opérateur d'observation \mathcal{H} n'est pas linéaire, la matrice \mathbf{H} correspond à la linéarisation de la relation entre les variables observables et les paramètres à estimer (§ 2.2.2.3).

Ébauche L'ébauche \mathbf{x}^b (b pour background) est une estimation a priori (c'est-à-dire avant assimilation) des paramètres réels \mathbf{x}^t . Il peut s'agir du résultat obtenu lors d'une assimilation précédente ou bien du fruit d'analyses de données.

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x}^t + \epsilon^b \quad (2.24)$$

ϵ^b , de dimension n , représente l'*erreur d'ébauche* c'est-à-dire les incertitudes sur \mathbf{x}^b .

S'il existe une estimation a priori de l'état réel du système, l'ensemble des informations disponibles ne se réduit plus aux seules observations \mathbf{y}^o , il est donc possible de réécrire l'équation (2.23) en introduisant le vecteur des observations généralisées : $\mathbf{z}^o = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^b \\ \mathbf{y}^o \end{pmatrix}$, de dimension $n+p$.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^o &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \mathbf{x}^t + \begin{pmatrix} \epsilon^b \\ \epsilon^o \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{H}^z \mathbf{x}^t + \epsilon^z \end{aligned} \quad (2.25)$$

Hypothèses Les vecteurs d'erreur ϵ^o et ϵ^b sont supposés non biaisés et de matrices de variance-covariance \mathbf{R} et \mathbf{P} connues (hypothèse gaussienne). Dans le cadre de cette hypothèse, si la densité de probabilité gaussienne de moyenne ν et d'espérance σ^2 est notée $\mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$, alors ϵ^o suit la loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}_p, \mathbf{R})$ et ϵ^b suit la loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \mathbf{P})$. Le vecteur d'erreur ϵ^z sur \mathbf{z}^o suit donc la loi $\mathcal{N}\left(\mathbf{0}_{n+p}, \mathbf{R}^z = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}\right)$.

2.2.2.1 Minimisation de la variance de l'estimateur linéaire

Sans ébauche De la même façon qu'au paragraphe (2.2.1.1), aucune information a priori et, par conséquent, aucune ébauche n'étant disponible, l'estimateur \mathbf{x}^a est cherché sous la forme d'une combinaison linéaire des observations :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{C}\mathbf{y}^o \quad (2.26)$$

où \mathbf{C} est la matrice à déterminer, de dimension (n, p) .

\mathbf{x}^a doit être non biaisé : il faut donc que la moyenne de l'erreur $\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t$ soit nulle.

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t] &= E[\mathbf{C}\mathbf{y}^o - \mathbf{x}^t] \\
 &= E[\mathbf{C}(\mathbf{H}\mathbf{x}^t + \epsilon^o) - \mathbf{x}^t] \\
 &= E[(\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{I}_{n \times n})\mathbf{x}^t + \mathbf{C}\epsilon^o] \\
 &= (\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{I}_{n \times n})E[\mathbf{x}^t] + \mathbf{C}E[\epsilon^o] \\
 &= (\mathbf{C}\mathbf{H} - \mathbf{I}_{n \times n})\mathbf{x}^t
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

soit

$$\mathbf{C}\mathbf{H} = \mathbf{I}_{n \times n} \tag{2.28}$$

Parmi tous les estimateurs vérifiant la relation (2.28), celui minimisant la variance de l'estimateur d'erreur est choisi. Il s'agit donc de minimiser la trace de la matrice \mathbf{A} de variance-covariance d'erreur, à savoir la somme des variances, sous la contrainte (2.28).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= E[(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t)(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t)^T] \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{R}\mathbf{C}^T
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Selon Desrozières (2001), il est possible de montrer que ce minimum est atteint pour

$$\mathbf{C} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \tag{2.30}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{\text{BLUE}}^a &= \mathbf{C}\mathbf{y}^o \\
 &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}^o
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Cet estimateur est le meilleur estimateur linéaire non biaisé ou BLUE (Best Linear Unbiased Estimator). L'expression (2.30) n'a de sens que si la matrice $\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}$ est inversible. D'autre part, cet estimateur n'est valable que si le nombre d'observations est supérieur au nombre de paramètres à estimer. Dans le cas contraire, il est nécessaire d'introduire une ébauche et de choisir un autre estimateur.

Avec $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} (\sigma_1^o)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma_2^o)^2 \end{pmatrix}$, correspondant au cas de l'exemple avec deux observations (§ 2.2.1), la matrice \mathbf{A} est un scalaire qui s'exprime comme suit

$$A = (\sigma^a)^2 = \left(\frac{1}{(\sigma_1^o)^2} + \frac{1}{(\sigma_2^o)^2} \right)^{-1}$$

et \mathbf{C} est une matrice de dimension (1, 2) :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{(\sigma_2^o)^2}{(\sigma_1^o)^2 + (\sigma_2^o)^2} & \frac{(\sigma_1^o)^2}{(\sigma_1^o)^2 + (\sigma_2^o)^2} \end{pmatrix}$$

Avec ébauche L'estimateur est cherché sous la même forme que pour le cas sans ébauche (Eq. 2.26), mais les informations disponibles, observations et ébauche, sont regroupées dans le vecteur \mathbf{z}^o des observations généralisées.

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{C}^z \mathbf{z}^o \tag{2.32}$$

De la même façon que précédemment (Eq. 2.28), la condition de biais nul induit la relation suivante (Eq. 2.33), la condition de variance minimale conduit à l'expression de la matrice \mathbf{C}^z (Eq. 2.34) :

$$\mathbf{C}^z \mathbf{H}^z = \mathbf{I}_{n \times n} \tag{2.33}$$

$$\mathbf{C}^z = \left(\mathbf{H}^{zT} \mathbf{R}^{z-1} \mathbf{H}^z \right)^{-1} \mathbf{H}^{zT} \mathbf{R}^{z-1} \quad (2.34)$$

avec $\mathbf{R}^z = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}$.

Finalement, le meilleur estimateur linéaire non biaisé (BLUE) s'écrit, pour une ébauche \mathbf{x}^b et des observations \mathbf{y}^o :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{BLUE}}^a &= \mathbf{C}^z \mathbf{z}^o \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^b \\ \mathbf{y}^o \end{pmatrix} \\ &= \left(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \left(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}^b + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}^o \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Cette expression est équivalente à :

$$\mathbf{x}_{\text{BLUE}}^a = \mathbf{x}^b + \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{y}^o - \mathbf{H} \mathbf{x}^b) \quad (2.36)$$

L'estimateur BLUE s'écrit comme la somme de l'ébauche et d'une correction issue du *vecteur d'innovation* $\mathbf{d} = (\mathbf{y}^o - \mathbf{H} \mathbf{x}^b)$, de dimension p . La matrice de correction, de dimension (n, p)

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (2.37)$$

est appelée matrice *gain*. Le terme $\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T$ représente la matrice de variance-covariance d'erreur sur l'ébauche ramenée dans l'espace des observations. Ce gain \mathbf{K} est l'équivalent, dans le cas multi-dimensionnel, du facteur $\frac{(\sigma^b)^2}{(\sigma^b)^2 + (\sigma^o)^2}$ qui apparaît dans la solution optimale au sens des moindres carrés, en présence d'une seule observation y^o de x , de variance d'erreur $(\sigma^o)^2$ et d'une estimation a priori x^b , de variance d'erreur $(\sigma^b)^2$ (Eq. 2.20) :

$$\begin{aligned} x^a &= \frac{(\sigma^b)^2}{(\sigma^b)^2 + (\sigma^o)^2} y^o + \frac{(\sigma^o)^2}{(\sigma^b)^2 + (\sigma^o)^2} x^b \\ &= x^b + \frac{(\sigma^b)^2}{(\sigma^b)^2 + (\sigma^o)^2} (y^o - x^b) \end{aligned} \quad (2.38)$$

L'opérateur d'observation \mathbf{H} est en réalité un opérateur de passage entre l'espace de l'état du modèle et l'espace des observations. Il permet de comparer des matrices de dimensions différentes, comme \mathbf{R} , qui est définie dans l'espace des observations, et \mathbf{P} , qui est définie dans l'espace des états du modèle (Hölm, 2003).

Qualité de l'estimation La matrice \mathbf{A} de variance-covariance d'erreur (Eq. 2.29) s'exprime de la façon suivante :

– sans ébauche (vu Eq. 2.30) :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (2.39)$$

– avec ébauche (vu Eq. 2.34) :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (2.40)$$

ou encore

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \quad (2.41)$$

La précision de l'estimation \mathbf{A}^{-1} est donc la somme de la précision de l'ébauche \mathbf{P}^{-1} et de la précision des observations $\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}$.

Cette matrice \mathbf{A} fournit les variances-covariances d'erreur d'estimation associées aux composantes de \mathbf{x}^a . Elle apporte donc une information supplémentaire sur la précision de l'estimation donnée par \mathbf{x}^a .

2.2.2.2 Moindres carrés pondérés

Il est également possible de rechercher un estimateur qui minimise la distance à toutes les observations disponibles en prenant en compte leur précision respective.

En l'absence d'information a priori, cela revient à minimiser la fonctionnelle

$$\Phi_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{y}^o - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - \mathbf{H}\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

Lorsque la matrice \mathbf{R} est égale à la matrice identité, la fonctionnelle Φ_o devient la norme usuelle de l'écart entre observations \mathbf{y}^o et état observé $\mathbf{H}\mathbf{x}$: c'est la méthode des moindres carrés. L'introduction de \mathbf{R} permet de pondérer les observations par leur précision (variances) et de contraindre le système (covariances).

Lorsque qu'une ébauche de l'état réel est disponible, la fonctionnelle à minimiser devient :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)}_{\Phi_b} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{y}^o - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - \mathbf{H}\mathbf{x})}_{\Phi_o} \quad (2.43)$$

Elle mesure la distance à toutes les informations disponibles, à savoir :

- la première partie Φ_b représente la distance à l'ébauche \mathbf{x}^b pondérée par la matrice \mathbf{P} afin de tenir compte de cette estimation a priori,
- la deuxième partie Φ_o représente la distance aux observations \mathbf{y}^o pondérée par la matrice \mathbf{R} .

Le gradient de Φ par rapport à \mathbf{x} s'écrit

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Phi = \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - \mathbf{H}\mathbf{x}) \quad (2.44)$$

d'où l'expression de la solution (Eq. 2.45), qui est la même que celle du "BLUE", précédemment énoncée (Eq. 2.36). Les restrictions sur l'équivalence des deux approches ont été mentionnées dans le cas de l'exemple simplifié (§ 2.2.1.1).

$$\mathbf{x}^a = (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}^b + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}^o) \quad (2.45)$$

2.2.2.3 Opérateur d'observation non linéaire

Les développements qui viennent d'être exposés sont basés sur l'hypothèse de la linéarité de l'opérateur d'observation \mathcal{H} . Lorsque \mathcal{H} n'est pas linéaire, la fonctionnelle à minimiser (Eq. 2.43) devient

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2} (\mathbf{y}^o - \mathcal{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - \mathcal{H}(\mathbf{x})) \quad (2.46)$$

Minimiser cette fonction coût revient à chercher l'incrément $\delta\mathbf{x}$ qu'il faut ajouter à l'ébauche pour se rapprocher du minimum. Effectuer le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}$ permet de faire un développement limité de l'opérateur d'observation \mathcal{H} au voisinage de l'ébauche :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(\mathbf{x}^b) + \mathbf{H} \delta\mathbf{x} + o(\|\delta\mathbf{x}\|) \quad (2.47)$$

\mathbf{H} est la matrice des dérivées partielles de l'opérateur \mathcal{H} par rapport à \mathbf{x} , en \mathbf{x}^b :

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^b} \quad (2.48)$$

En introduisant cette approximation dans l'expression (2.46) de la fonctionnelle, celle-ci devient une fonction quadratique de la nouvelle variable $\delta \mathbf{x}$:

$$\Phi(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{P}^{-1} \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{y}^o - \mathcal{H}(\mathbf{x}^b) - \mathbf{H} \delta \mathbf{x} \right)^T \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{y}^o - \mathcal{H}(\mathbf{x}^b) - \mathbf{H} \delta \mathbf{x} \right) \quad (2.49)$$

D'où l'expression de son gradient par rapport à $\delta \mathbf{x}$:

$$\nabla_{\delta \mathbf{x}} \Phi = \mathbf{P}^{-1} \delta \mathbf{x} - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{y}^o - \mathcal{H}(\mathbf{x}^b) - \mathbf{H} \delta \mathbf{x} \right) \quad (2.50)$$

L'incrément $\delta \mathbf{x}^a$ qui minimise Φ , c'est-à-dire qui annule son gradient, s'écrit donc :

$$\delta \mathbf{x}^a = (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{y}^o - \mathcal{H}(\mathbf{x}^b) \right) \quad (2.51)$$

Le meilleur estimateur $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \delta \mathbf{x}^a$ lorsque l'opérateur d'observation est non linéaire est alors :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{y}^o - \mathcal{H}(\mathbf{x}^b) \right) \quad (2.52)$$

2.2.2.4 Méthode de minimisation numérique

En pratique, la minimisation de la fonctionnelle Φ se fait au moyen d'algorithmes itératifs utilisant le gradient de cette fonctionnelle (Equipe PALM, 1998). La plupart de ces algorithmes de minimisation sans contraintes sont basés sur une méthode dite "de descente" : en partant d'un point \mathbf{x}_0 de l'espace des paramètres à estimer, l'algorithme construit une suite de points dont le but est de converger vers le point de contrôle optimal en faisant diminuer le plus rapidement possible la fonctionnelle. La direction liant deux points successifs, appelée direction de descente, est calculée par l'algorithme grâce aux directions du gradient de la fonctionnelle ($\nabla_{\delta \mathbf{x}} \Phi$, eq. 2.50). Il existe un grand nombre d'algorithmes de minimisation. Afin d'en illustrer le principe, le fonctionnement de l'algorithme de Newton, méthode de descente classique, est détaillé ci-dessous.

L'algorithme de Newton pour la recherche du zéro d'une fonction $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ au voisinage d'un point \mathbf{x}_0 permet de définir une suite $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [\nabla \mathcal{G}(\mathbf{x}_k)]^{-1} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{x}_k) \quad (2.53)$$

$\nabla \mathcal{G}(\mathbf{x}_k)$ est la Jacobienne de \mathcal{G} calculée au point \mathbf{x}_k , elle doit être inversible et définie positive. La suite des $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ est localement convergente si \mathbf{x}_0 , point de départ de l'algorithme, n'est pas trop éloigné d'un zéro \mathbf{x}^* de \mathcal{G} , et si la Jacobienne de \mathcal{G} n'est pas singulière en \mathbf{x}^* .

Minimiser la fonctionnelle Φ revient à chercher le zéro de son gradient. La fonction \mathcal{G} considérée est alors la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}_k &\rightarrow \nabla \Phi(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (2.54)$$

L'algorithme de Newton pour un problème de minimisation s'écrit donc :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [Hess \Phi(\mathbf{x}_k)]^{-1} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}_k) \quad (2.55)$$

$Hess \Phi(\mathbf{x}_k)$ est la Jacobienne de $\nabla \Phi$ calculée au point \mathbf{x}_k , c'est-à-dire la matrice hessienne de Φ . Dans un problème d'optimisation, un autre paramètre α_k , appelé pas de descente, intervient. La suite (2.55) est remplacée par l'expression suivante :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k [Hess \Phi(\mathbf{x}_k)]^{-1} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}_k) \quad (2.56)$$

Le pas α_k de progression le long de la direction de descente $\mathbf{d}_k = -[Hess\Phi(\mathbf{x}_k)]^{-1} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}_k)$ est calculé de façon à contribuer à la convergence de l'algorithme d'optimisation, c'est-à-dire tel que $\Phi(\mathbf{x}_{k+1}) < \Phi(\mathbf{x}_k)$.

Le calcul numérique de la matrice hessienne $Hess\Phi$ nécessite un grand nombre d'opérations. Les méthodes de type quasi-Newton permettent de les éviter en utilisant uniquement les valeurs du gradient $\nabla\Phi$ de la fonctionnelle et des points \mathbf{x}_k et \mathbf{x}_{k+1} pour calculer une approximation de $Hess\Phi$ de façon récursive. La formule de mise à jour de la matrice hessienne élaborée par Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno (BFGS) est parmi celles qui donne les meilleurs résultats (Ngnepieba, 2001) :

$$\begin{aligned} Hess\Phi_{k+1} = & Hess\Phi_k + \frac{(\nabla\Phi_{k+1} - \nabla\Phi_k)(\nabla\Phi_{k+1} - \nabla\Phi_k)^T}{(\nabla\Phi_{k+1} - \nabla\Phi_k)^T(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)} \\ & - \frac{Hess\Phi_k^T(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)^T(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)Hess\Phi_k}{(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)^T Hess\Phi_k(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)} \end{aligned} \quad (2.57)$$

A la première itération, $Hess\Phi_0$ peut être définie comme n'importe quelle matrice symétrique définie positive, la matrice identité par exemple. Afin d'éviter d'avoir à inverser $Hess\Phi(\mathbf{x}_k)$, il est possible d'utiliser directement la formule BFGS inverse qui fournit une approximation récursive de l'inverse de la matrice hessienne $[Hess\Phi(\mathbf{x}_k)]^{-1}$.

L'algorithme de minimisation, de type quasi-Newton, peut être synthétisé de la façon suivante : à chaque itération, le point $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ est connu, les calculs effectués sont :

1. Calcul du gradient au point \mathbf{x}_k : $\nabla\Phi_k = \nabla\Phi(\mathbf{x}_k)$,
2. Calcul de la direction de descente \mathbf{d}_k : $\mathbf{d}_k = -Hess\Phi_k^{-1} \cdot \nabla\Phi_k$ où $Hess\Phi_k = Hess\Phi(\mathbf{x}_k)$,
3. Calcul du pas de descente α_k ,
4. Calcul du nouveau point $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$.

Le gradient $\nabla\Phi_k$ de la fonctionnelle Φ au point \mathbf{x}_k peut être calculé en utilisant la méthode des différences finies. Ce procédé nécessite $2n$ intégrations du modèle, n étant la dimension du vecteur de paramètres, il est donc coûteux en terme de temps de calcul. Toutefois, lorsque le modèle n'est pas trop lourd à mettre en oeuvre, calculer le gradient par la méthode des différences finies évite d'avoir recours à la méthode de l'état adjoint, outil générique utilisé pour le calcul du gradient lorsque le vecteur de paramètres \mathbf{x} est de grandes dimensions (Ex. : en météorologie, océanographie). Il faut cependant être attentif au choix de la perturbation : il peut conduire à des erreurs d'arrondis si la perturbation est trop faible, et à des comportements non-linéaires si elle est trop importante (Le Dimet & Blum, 2002). Le principal avantage de cette méthode est sa simplicité de mise en oeuvre.

Critère d'arrêt de l'algorithme Xiong & O'Connor (2000) estiment qu'aucun critère d'arrêt existant n'est fiable en tant qu'indicateur de la convergence de l'algorithme vers un minimum global :

none of the existing stopping criteria are reliable in terms of indicating arrival at the global optimum, except in the most trivial case that on the response surface there does indeed exist an "absolutely outstanding" global optimum.

Il existe néanmoins un certain nombre de critères d'arrêt qui indiquent la convergence de l'algorithme vers un minimum local. Ils peuvent être basés sur le nombre d'itérations ou bien sur le nombre total d'évaluations de la fonction coût. Un exemple de critère d'arrêt fréquemment utilisé est basé sur le gradient de la fonctionnelle Φ :

$$\frac{\|\nabla\Phi(\mathbf{x}_k)\|}{\|\nabla\Phi(\mathbf{x}_0)\|} \leq \beta \quad (2.58)$$

L'indice \mathbf{k} indique le numéro de l'itération de l'algorithme de minimisation, β est le seuil de tolérance fixé par l'utilisateur.

Minimisation avec contraintes La fonctionnelle $\Phi(\mathbf{x})$ à minimiser peut être assujettie à des contraintes de différentes formes (The Mathworks Inc., 2002) :

- contraintes d'égalités, $G_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m_e$,
- contraintes d'inégalités, $G_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = m_e + 1, \dots, m$,
- intervalles de variation des paramètres, $\mathbf{x}_{\inf} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\sup}$.

La fonction $G(\mathbf{x})$ donne les valeurs des contraintes d'égalités et d'inégalités au point \mathbf{x} ($G(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$).

Lorsque Φ et/ou G sont des fonctions non linéaires de la variable \mathbf{x} , la solution du problème requiert en général un processus itératif permettant d'établir la direction de descente à chaque nouvelle itération, ce qui est la plupart du temps effectué en se ramenant à un sous-problème non contraint.

2.2.3 Filtre de Kalman

The Kalman filter! ... For some it is a buzzword that must be used in a proposal when attempting to obtain contractual support for a new effort; for others, it is an answer in search of a problem as they already know of better ways to solve their specific problem; for some it represents a practical set of procedures that they can use to process numerical data to obtain estimates of parameters and variables whose values are uncertain (Sorenson, 1985) in (Ahsan & O'Connor, 1994).

2.2.3.1 Méthodologie

Le filtre de Kalman (1960) est l'outil de base de l'approche séquentielle pour le problème de l'assimilation de données dans les modèles numériques. Il est basé sur l'expression du meilleur estimateur linéaire non biaisé, ou BLUE, exposée aux paragraphes (2.2.1.1) et (2.2.2.1).

La simulation numérique de la dynamique de l'état réel d'un système nécessite une discrétisation à la fois spatiale et temporelle. \mathbf{x}^t étant le vecteur de dimension n des "vraies" valeurs des paramètres à estimer (§ 2.2.2), en faisant l'hypothèse d'un modèle linéaire, l'état réel $\mathbf{x}^t(t_k)$ au temps t_k se calcule à partir de l'état réel $\mathbf{x}^t(t_{k-1})$ au temps t_{k-1} par intégration du modèle :

$$\mathbf{x}^t(t_k) = \mathbf{M}_{\mathbf{k},\mathbf{k}-1} \mathbf{x}^t(t_{k-1}) + \boldsymbol{\eta}(t_k, t_{k-1}) \quad (2.59)$$

$\mathbf{M}_{\mathbf{k},\mathbf{k}-1}$ est la matrice dynamique, de dimension (n, n) , décrivant l'opérateur de transition entre deux états t_{k-1} et t_k , $\boldsymbol{\eta}(t_k, t_{k-1})$ est un vecteur de dimension n représentant l'erreur modèle. $\boldsymbol{\eta}(t_k, t_{k-1})$ prend en compte les erreurs numériques, conséquences de la discrétisation, et les erreurs de la modélisation elle-même. Il est supposé non biaisé et de matrice de variance-covariance $\mathbf{Q}_{\mathbf{k},\mathbf{k}-1}$.

Le vecteur des observations $\mathbf{y}^o(t_k)$ au temps t_k , de dimension p , est l'image de l'état réel $\mathbf{x}^t(t_k)$ au temps t_k par l'opérateur d'observation (supposé linéaire) $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$, matrice de dimension (p, n) :

$$\mathbf{y}^o(t_k) = \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^t(t_k) + \boldsymbol{\epsilon}^o(t_k) \quad (2.60)$$

$\boldsymbol{\epsilon}^o(t_k)$ est un vecteur aléatoire de dimension p représentant les erreurs d'observation, celles dues à la précision des mesures ainsi que celles dues à la modélisation. Il est supposé non biaisé et de matrice de variance-covariance $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}$.

L'expression du meilleur estimateur linéaire non biaisé, ou BLUE, (Eq. 2.36) devient :

$$\mathbf{x}^a(t_k) = \mathbf{x}^f(t_k) + \mathbf{K}_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{y}^o(t_k) - \mathbf{H}_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^f(t_k) \right) \quad (2.61)$$

$\mathbf{x}^f(t_k)$ (f pour forecast) est le terme d'ébauche, c'est-à-dire l'estimation a priori de l'état réel $\mathbf{x}^t(t_k)$. La meilleure information disponible étant l'analyse au temps précédent $\mathbf{x}^a(t_{k-1})$, la prévision $\mathbf{x}^f(t_k)$ est obtenue par intégration du modèle :

$$\mathbf{x}^f(t_k) = \mathbf{M}_{k,k-1} \mathbf{x}^a(t_{k-1}) \quad (2.62)$$

L'erreur commise en estimant $\mathbf{x}^t(t_k)$ par $\mathbf{x}^f(t_k)$ est considérée comme non biaisée et de matrice de variance-covariance \mathbf{P}_k^f . La matrice \mathbf{K}_k , appelée *gain de Kalman*, est de la forme (Eq. 2.37) :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (2.63)$$

Après une phase d'initialisation, le filtre de Kalman opère en deux étapes d'une manière récursive : une étape de prévision par le modèle, et une étape de correction de la prévision à chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible (Fig. 2.1a).

Initialisation Au temps initial t_0 , il n'y a pas d'analyse au temps précédent, le terme d'ébauche $\mathbf{x}^b(t_0)$ regroupe donc les informations a priori sur l'état initial réel $\mathbf{x}^t(t_0)$ du système

$$\mathbf{x}^b(t_0) = \mathbf{x}^t(t_0) + \epsilon^b(t_0) \quad (2.64)$$

$\epsilon^b(t_0)$ est le vecteur aléatoire de dimension n représentant d'erreur d'ébauche. Il est supposé non biaisé et de matrice de variance-covariance \mathbf{P}_0^b .

L'initialisation du filtre de Kalman consiste à poser :

$$\mathbf{x}^a(t_0) = \mathbf{x}^b(t_0) \quad (2.65)$$

$$\mathbf{P}_0^a = \mathbf{P}_0^b \quad (2.66)$$

L'analyse opérée par le filtre de Kalman au temps t_k s'appuie sur la connaissance de l'état analysé au temps précédent $\mathbf{x}^a(t_{k-1})$, estimateur linéaire non biaisé de l'état réel $\mathbf{x}^t(t_{k-1})$ au temps t_{k-1} , temps de l'observation $\mathbf{y}^o(t_{k-1})$. La matrice de variance-covariance d'erreur \mathbf{P}_{k-1}^a est associée à cette analyse. Le modèle de prévision $\mathbf{M}(t_k, t_{k-1})$, linéaire, produit l'état au temps t_k à partir de l'état au temps t_{k-1} , moyennant une erreur de $\eta(t_k, t_{k-1})$ par rapport à la dynamique réelle (Massart, 2003).

Étape de prévision

- Calcul de la prévision $\mathbf{x}^f(t_k)$ au temps t_k , par intégration du modèle, à partir de l'état analysé à l'instant précédent $\mathbf{x}^a(t_{k-1})$,

$$\mathbf{x}^f(t_k) = \mathbf{M}_{k,k-1} \mathbf{x}^a(t_{k-1}) \quad (2.67)$$

- Calcul de la matrice de variance-covariance d'erreur sur la prévision \mathbf{P}_k^f , à partir de la matrice de variance-covariance d'erreur sur l'analyse au temps d'observation précédent \mathbf{P}_{k-1}^a et de la matrice de variance-covariance d'erreur modèle $\mathbf{Q}_{k,k-1}$,

$$\mathbf{P}_k^f = \mathbf{M}_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_{k,k-1}^T + \mathbf{Q}_{k,k-1} \quad (2.68)$$

Étape de correction

- Calcul du gain de Kalman,

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (2.69)$$

- Calcul de la matrice de variance-covariance d'erreur sur l'état analysé \mathbf{P}_k^a , à partir de la matrice de variance-covariance d'erreur sur la prévision \mathbf{P}_k^f et du gain \mathbf{K}_k ,

$$\mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^f \quad (2.70)$$

- Calcul de l'analyse $\mathbf{x}^a(t_k)$ à partir de la prévision $\mathbf{x}^f(t_k)$, des observations $\mathbf{y}^o(t_k)$ et du gain de Kalman \mathbf{K}_k .

$$\mathbf{x}^a(t_k) = \mathbf{x}^f(t_k) + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}^o(t_k) - \mathbf{H}_k \mathbf{x}^f(t_k) \right) \quad (2.71)$$

2.2.3.2 Extension aux modèles non-linéaires : le filtre de Kalman étendu

Pour l'application à un système physique, l'hypothèse la plus contraignante sur laquelle s'appuie l'analyse du filtre de Kalman est la linéarité de l'opérateur d'observation et du modèle dynamique. Pour pallier les points faibles du filtre de Kalman, dont cette hypothèse de linéarité, plusieurs schémas sous optimaux ont été proposés, parmi lesquels le filtre de Kalman étendu. Les équations de ce filtre peuvent être obtenues en linéarisant les équations du modèle autour de l'estimation courante de l'état.

Avec des opérateurs de transition \mathcal{M} et \mathcal{H} non linéaires, le modèle dynamique (Eq. 2.59, 2.60) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t(t_k) &= \mathcal{M}(t_k, t_{k-1}, \mathbf{x}^t(t_{k-1})) + \eta(t_k, t_{k-1}) \\ \mathbf{y}^o(t_k) &= \mathcal{H}(t_k, \mathbf{x}^t(t_k)) + \epsilon^o(t_k) \end{aligned} \quad (2.72)$$

A chaque instant t_k , il faut linéariser ce système autour de l'état analysé $\mathbf{x}^a(t_{k-1})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t(t_k) &= \mathcal{M}(t_k, t_{k-1}, \mathbf{x}^a(t_{k-1})) + \mathbf{M}_{k,k-1} (\mathbf{x}^t(t_{k-1}) - \mathbf{x}^a(t_{k-1})) + \eta(t_k, t_{k-1}) \\ &= \mathbf{x}^f(t_k) + \mathbf{M}_{k,k-1} (\mathbf{x}^t(t_{k-1}) - \mathbf{x}^a(t_{k-1})) + \eta(t_k, t_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{y}^o(t_k) = \mathcal{H}(t_k, \mathbf{x}^f(t_k)) + \mathbf{H}_k (\mathbf{x}^t(t_k) - \mathbf{x}^a(t_k)) + \epsilon^o(t_k) \quad (2.74)$$

$\mathbf{M}_{k,k-1}$ et \mathbf{H}_k désignent les gradients de $\mathcal{M}(t_k, t_{k-1}, \mathbf{x}(t_{k-1}))$ et de $\mathcal{H}(t_k, \mathbf{x}(t_k))$, calculés aux points $\mathbf{x}^a(t_{k-1})$ et $\mathbf{x}^f(t_k)$ respectivement.

Il est alors possible d'appliquer le filtre de Kalman à ce nouveau modèle linéaire, dont l'état est $\mathbf{x}^t(t_k) - \mathbf{x}^f(t_k)$, pour obtenir les équations du filtre de Kalman étendu. L'initialisation est identique à celle du filtre de Kalman (Eq. 2.65 et 2.66).

- Étape de prévision

$$\mathbf{x}^f(t_k) = \mathcal{M}(t_k, t_{k-1}, \mathbf{x}^a(t_{k-1})) \quad (2.75)$$

$$\mathbf{P}_k^f = \mathbf{M}_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_{k,k-1}^T + \mathbf{Q}_{k,k-1} \quad (2.76)$$

- Étape de correction

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^f \quad (2.78)$$

$$\mathbf{x}^a(t_k) = \mathbf{x}^f(t_k) + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}^o(t_k) - \mathcal{H}(t_k, \mathbf{x}^f(t_k)) \right) \quad (2.79)$$

La linéarisation fait perdre au filtre de Kalman son caractère optimal. Le filtre de Kalman étendu a néanmoins déjà été implémenté et testé avec succès dans plusieurs cas (Pham *et al.*, 1998; Daouas & Radhouani, 2000; Aubert *et al.*, 2001, ...). Ahsan & O'Connor (1994) détaillent quelques unes de ces applications :

The joint estimation of the state variables and of the parameters of a linear flow forecasting model is an example of a non-linear estimation problem, for which Todini (1978) devised a very elaborate method of solution using the Extended Kalman Filter.

Cependant, le filtre de Kalman étendu ne fournit de résultats satisfaisants que lorsque le modèle dynamique ne présente pas de trop fortes non-linéarités. Madsen & Cañizares (1999) soulignent

the extended Kalman filter is expected to work well only for weakly non-linear dynamics. For strongly non-linear dynamics, it may fail.

2.2.3.3 Application à l'estimation de paramètres - Cas stationnaire

Soient deux paramètres à estimer, K_{smin} et K_{smaj} , les coefficients de Strickler du lit mineur et du majeur d'un cours d'eau (Fig. 1.5) par exemple. Ces paramètres sont supposés invariants en temps. Dans la notation "state-space" de la théorie du filtre de Kalman exposée au paragraphe (2.2.3.1), le vecteur $\mathbf{x}^t(t_k) = \mathbf{x}_k^t = \begin{bmatrix} K_{smin} \\ K_{smaj} \end{bmatrix}_k$ représente l'état réel du système au temps t_k . Soit \mathbf{y}_k^o , le vecteur de dimension p des observations au temps t_k . Dans la terminologie du contrôle optimal, \mathbf{y}_k^o représente les sorties, c'est-à-dire les variables observables de l'état du système \mathbf{x}_k^t . Il peut s'agir, par exemple, de cotes d'eau en p points, le long du cours d'eau étudié.

Le problème se formule donc de la façon suivante (Ferraresi *et al.*, 1996) :

- Modélisation du système :

$$\begin{bmatrix} K_{smin} \\ K_{smaj} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} K_{smin} \\ K_{smaj} \end{bmatrix}_{k-1} \quad (2.80)$$

- Modélisation des observations :

$$\mathbf{y}_k^o = \mathcal{H}(k, \mathbf{x}_k^f) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k^t - \mathbf{x}_k^a) + \epsilon_k^o \quad (2.81)$$

\mathcal{H} est l'opérateur d'observation et \mathbf{H}_k , de dimension $(p, 2)$ dans l'exemple, son gradient, calculé au point \mathbf{x}_k^f :

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_1(k, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{H}_1(k, \mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathcal{H}_p(k, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{H}_p(k, \mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k^f} \quad (2.82)$$

L'algorithme du filtre de Kalman étendu se dérive aisément à partir de cette formulation :

Étape de prévision Cette phase de prévision consiste à intégrer le modèle à partir de l'analyse \mathbf{x}^a obtenue à l'étape précédente afin d'obtenir la prévision \mathbf{x}^f . Le régime considéré dans cet exemple étant stationnaire, la prévision est égale à l'analyse, soit :

- Calcul de la prévision,

$$\begin{bmatrix} K_{smin} \\ K_{smaj} \end{bmatrix}_k^f = \begin{bmatrix} K_{smin} \\ K_{smaj} \end{bmatrix}_{k-1}^a \quad (2.83)$$

- Calcul de la matrice de variance-covariance d'erreur sur la prévision, de dimension $(2, 2)$ dans l'exemple,

$$\mathbf{P}_k^f = \mathbf{P}_{k-1}^a \quad (2.84)$$

Étape de correction

- Calcul du vecteur d'innovation, de dimension p ,

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{y}_k^o - \mathcal{H}(k, \mathbf{x}_k^f) \quad (2.85)$$

- Calcul du gain de Kalman, de dimension $(2, p)$ dans l'exemple,

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (2.86)$$

- Calcul de la matrice de variance-covariance d'erreur sur l'état analysé,

$$\mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I}_{2 \times 2} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^f$$

- Calcul de l'état analysé.

$$\begin{bmatrix} K_{s_{min}} \\ K_{s_{maj}} \end{bmatrix}_k^a = \begin{bmatrix} K_{s_{min}} \\ K_{s_{maj}} \end{bmatrix}_k^f + \mathbf{K}_k \mathbf{d}_k \quad (2.87)$$

L'indice k est en fait relatif à l'observation considérée. L'état analysé \mathbf{x}^a est corrigé à chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible. Le but recherché n'est pas d'estimer un état \mathbf{x} fonction du temps mais d'améliorer l'estimation de l'état \mathbf{x} obtenue en utilisant plusieurs jeux d'observations.

2.3 Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur la prévision

Une idée de plus en plus répandue en hydrologie et qui a été discutée en détails notamment par [Beven \(1989a\)](#); [Beven & Binley \(1992\)](#), suggère qu'il n'y a pas un jeu de paramètres optimal mais qu'à une modélisation donnée pourraient correspondre plusieurs jeux de paramètres également acceptables. En outre, ces jeux de paramètres pourraient provenir de régions très différentes de l'espace des paramètres à estimer. Il n'y aurait alors pas de raisonnement rigoureux susceptible de départager ces jeux de paramètres, qui permettent de simuler le comportement du système considéré de façon également satisfaisante. [Beven & Binley \(1992\)](#); [Freer et al. \(1996\)](#) parlent d'*équifinalité*, ce qui signifie :

there may be many parameter sets acceptable, in terms of near-equal model efficiency values, as a simulator of a system and there is no rigorous basis for differentiating between the goodness of these various parameter sets ([Xiong & O'Connor, 2000](#)).

Cette équifinalité est due aux erreurs dans la modélisation du processus physique, aux incertitudes sur les caractéristiques du bassin versant ainsi que sur les conditions aux limites. Les différents modèles au "comportement correct" (*behavioural* selon la terminologie de [Hornberger & Spear \(1981\)](#)) sont autant de simulateurs potentiels, aux performances également acceptables, du système étudié. Le terme de modèle est ici employé au sens de "structure de la modélisation + jeu de paramètres".

La même idée s'est ensuite étendue à la modélisation hydraulique. [Romanowicz & Beven \(2003\)](#) suggèrent en effet qu'il est possible de trouver un jeu de paramètres qui soit "optimal" pour un événement, mais :

this optimum is not robust with respect to calibration against different events ([Romanowicz & Beven, 2003](#)).

2.3.1 Generalized Sensitivity Analysis (GSA)

2.3.1.1 Introduction

[Hornberger & Spear \(1981\)](#) partent du principe que, d'une part les modèles simulant le comportement d'un système physique sont complexes et font intervenir de nombreux paramètres,

variables d'état et relations non-linéaires, d'autre part, les données d'entrée/sortie qui pourraient servir à calibrer un tel modèle ne sont pas toujours disponibles en quantité suffisante. Selon ces auteurs, l'unique analyse pertinente dans un tel contexte doit se concentrer sur la probabilité d'un comportement donné. Une des principales méthodes d'application d'un modèle de simulation dans un contexte probabiliste est la méthode de Monte-Carlo.

Deux types d'incertitudes interviennent dans la modélisation d'un processus : l'incertitude sur la structure du modèle (\mathcal{M} et \mathcal{H} pour reprendre les notations du paragraphe (2.2)), et l'incertitude sur la valeur des paramètres décrivant le système (paramètres rassemblés dans le vecteur \mathbf{x}). Selon les hypothèses formulées sur le fonctionnement du système, différentes structures de modèle ou *scénarii* seront employées (Saint-Venant 1D ou 2D, par exemple). Pour un scénario donné, chaque élément du vecteur \mathbf{x} est défini comme étant une variable aléatoire, dont la distribution est une mesure de l'incertitude sur la valeur "réelle", mais inconnue, du paramètre. Il est ainsi possible de définir un ensemble de modèles (Dans la terminologie de Hornberger & Spear (1981), "modèle = scénario + distribution des paramètres") dont certains vont être capable de reproduire le comportement recherché du système.

Définition du comportement Étant donné que les éléments du vecteur \mathbf{y}^o sont des variables observées, il semble pertinent de définir le comportement du système à partir de ces sorties. Dans le cas général, plusieurs catégories de comportement peuvent être distinguées. Sans perdre de vue cette notion de généralité, il est toutefois possible de définir le comportement de façon binaire, c'est-à-dire un phénomène qui a lieu ou non pour un scénario et un jeu de paramètres donnés. Les jeux de paramètres ayant permis de simuler le phénomène considéré appartiennent alors à la catégorie *behavioural* ; les autres, à la catégorie *non-behavioural*.

2.3.1.2 Méthodologie de l'analyse de sensibilité généralisée

Pour un scénario, un comportement et un jeu de distribution des paramètres \mathbf{x} donnés, une étude numérique permet d'explorer les propriétés de l'ensemble. En effet, un jeu de paramètres, choisi de façon aléatoire à partir des distributions initiales, permet de simuler le comportement du système. Il est alors possible de comparer (dans un sens à définir) le résultat de cette simulation au vecteur d'observations \mathbf{y}^o . Selon le critère choisi, à spécifier en fonction des finalités du modèle (cf. § 2.3.2.5), il y aura ou non occurrence du comportement cherché. Ce processus, répété un grand nombre de fois pour des jeux de paramètres choisis de façon aléatoire, détermine un échantillon de vecteurs de paramètres pour lesquels le comportement cherché s'est produit et un échantillon pour lesquels il ne s'est pas produit. L'idée-clé est d'essayer d'identifier un jeu de paramètres significatifs qui jouent un rôle important dans l'avènement du comportement recherché.

Le classement des éléments de \mathbf{x} , en fonction de leur influence sur le résultat de la simulation, est effectué au moyen d'une analyse des résultats des simulations Monte-Carlo. Soit x^k , un élément du vecteur de paramètres \mathbf{x} et $f(x^k)$ sa densité de probabilité cumulative *a priori* (c'est-à-dire avant les simulations Monte-Carlo). Après application de la méthode de Monte-Carlo, cette densité de probabilité va être divisée en deux parties (Fig. 2.2), l'une associée aux jeux de paramètres au "comportement correct", *behavioural* (B), l'autre associée aux jeux de paramètres ayant eu un "comportement incorrect", *non-behavioural* (\overline{B}). L'exemple de la figure (2.2) suggère que le paramètre x^k est important pour le comportement du système. En effet, sa densité de probabilité cumulative $f(x^k)$ est clairement divisée par la classification comportementale, c'est-à-dire que les densités de probabilité $f(x^k/B)$ et $f(x^k/\overline{B})$ associées respectivement aux catégories *behavioural* et *non-behavioural* sont bien distinctes. Dans le cas contraire, si $f(x^k/B)$ et $f(x^k/\overline{B})$ sont confondues avec la densité de probabilité *a priori* $f(x^k)$, le paramètre x^k n'est pas important pour le comportement recherché.

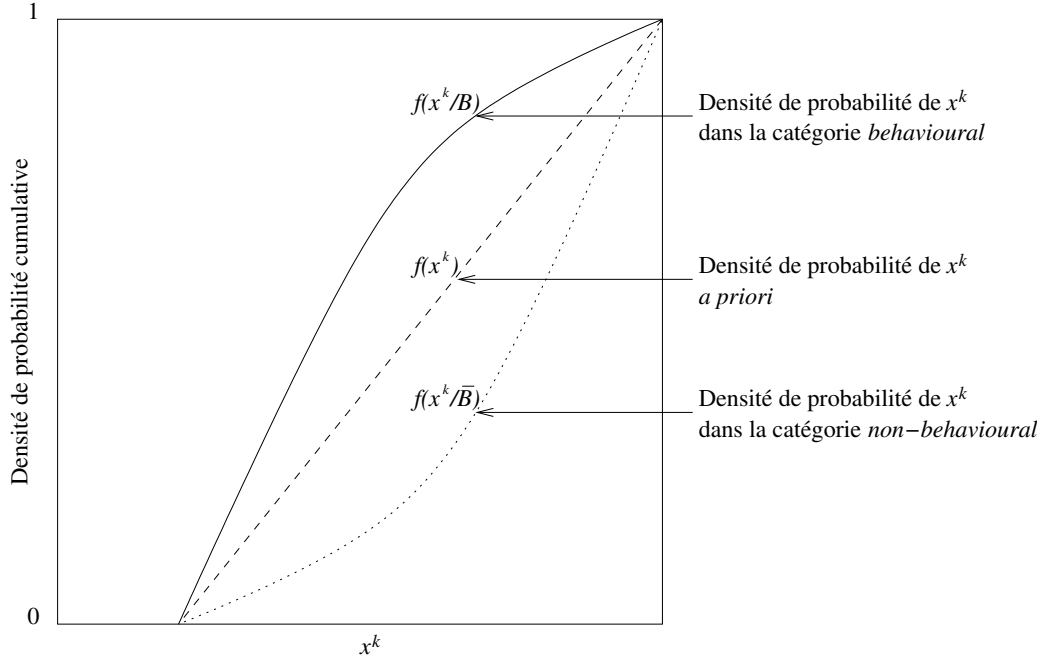


FIG. 2.2 – Densités de probabilité cumulatives du paramètre x^k , d'après [Hornberger & Spear \(1981\)](#)

Pour simplifier le discours, les considérations suivantes se rapportent au cas où les vecteurs de paramètres sont de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance la matrice identité $\mathbf{I}_{n \times n}$. Un classement des paramètres en fonction de leur sensibilité peut être opéré à partir d'une mesure directe de la séparation entre les deux densités de probabilité cumulatives $f(x^k/B)$ et $f(x^k/\bar{B})$. [Hornberger & Spear \(1981\)](#) utilisent la statistique suivante :

$$d_{m_c, n_c} = \sup_x |S_{n_c}(x) - S_{m_c}(x)| \quad (2.88)$$

S_{n_c} et S_{m_c} sont les fonctions de distribution des échantillons correspondant aux densités de probabilité $f(x^k/B)$ et $f(x^k/\bar{B})$ pour n_c "comportements corrects" et m_c "comportements incorrects". d_{m_c, n_c} est la statistique utilisée dans le test de Kolmogorov-Smirnov bilatéral ([Lacaze et al., 1997](#)). La table de Kolmogorov-Smirnov (Tab. 2.1) donne le risque de première espèce, c'est-à-dire la probabilité que les deux échantillons S_{n_c} et S_{m_c} aient la même distribution alors que $d_{m_c, n_c}|_{calculée} \geq d_{m_c, n_c}|_{tabulée}$. Étant donné que S_{n_c} et S_{m_c} sont des estimations de $f(x^k/B)$ et $f(x^k/\bar{B})$, d_{m_c, n_c} représente la distance verticale maximale entre ces deux courbes (Fig. 2.3). Par conséquent, une forte valeur de d_{m_c, n_c} indique que le paramètre considéré est important dans la simulation du comportement recherché. En revanche, le contraire n'est pas forcément vérifié. En effet, les densités de probabilité cumulatives $f(x^k/B)$ et $f(x^k/\bar{B})$ peuvent ne présenter aucune séparation alors que le paramètre x^k est crucial dans la simulation du comportement recherché, mais en raison de sa forte corrélation avec d'autres paramètres. C'est alors l'interaction entre deux paramètres qui compte pour simuler correctement un comportement donné. Dans un tel cas, il faut rechercher de l'information sur la covariance entre ces deux paramètres pour avoir une idée du degré de sensibilité du modèle à ces paramètres.

Dans le cas de l'estimation de paramètres hydrauliques, reste à définir le seuil qui va séparer les modèles ayant un "comportement correct" de ceux ayant un "comportement incorrect".

Niveau de signification	Risque de première espèce	Valeur critique de d_{m_c, n_c}
90.0 %	0.100	$1.22 \sqrt{\frac{m_c + n_c}{m_c \times n_c}}$
95.0 %	0.050	$1.36 \sqrt{\frac{m_c + n_c}{m_c \times n_c}}$
97.5 %	0.025	$1.48 \sqrt{\frac{m_c + n_c}{m_c \times n_c}}$
99.0 %	0.010	$1.63 \sqrt{\frac{m_c + n_c}{m_c \times n_c}}$
99.5 %	0.005	$1.73 \sqrt{\frac{m_c + n_c}{m_c \times n_c}}$
99.9 %	0.001	$1.95 \sqrt{\frac{m_c + n_c}{m_c \times n_c}}$

TAB. 2.1 – Valeurs critiques de d_{m_c, n_c} pour le test de Kolmogorov-Smirnov bilatéral (grands échantillons)

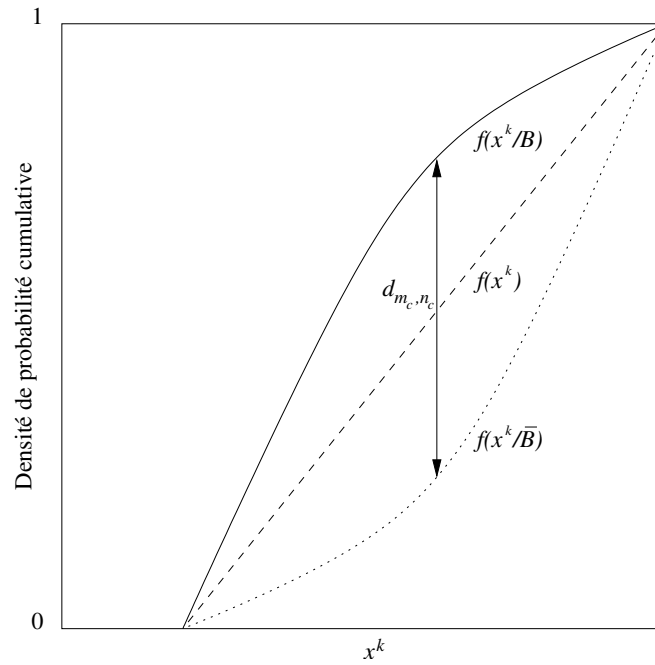


FIG. 2.3 – Statistique du test de Kolmogorov-Smirnov bilatéral d_{m_c, n_c}

2.3.2 Generalized Likelihood Uncertainty Estimation (GLUE)

In outlining the basis of the GLUE procedure, Beven (1989b) starts from the premise that prior to the introduction of any quantitative or qualitative information to a modelling exercise, any model/parameter set combination that predicts the variable or variables of interest must be considered equally likely as a simulator of the system. It is further suggested that because all model structures must, to some extent, be in error, then there is no reason to expect that any one set of parameter values will represent a true parameter set (within some particular model structure) to be found by some calibration procedures. Rather, it is suggested that it is only possible to make an assessment of the likelihood or possibility of a particular parameter set being an acceptable simulator of the system. We may then assign a likelihood weight to any model structure/parameter set combination on the basis of the evidence considered (Beven & Binley, 1992).

2.3.2.1 Introduction

Le procédé GLUE reconnaît la quasi-équivalence de différents jeux de paramètres dans la calibration des modèles distribués. Comme pour la technique d'analyse de sensibilité proposée par Hornberger & Spear (1981), elle est basée sur la méthode de Monte-Carlo qui consiste à faire de nombreuses simulations à l'aide d'un modèle donné et de jeux de paramètres choisis de façon aléatoire à partir d'une distribution fixée. Sur la base d'une comparaison entre les réponses simulées par le modèle et celles observées en réalité, une valeur de vraisemblance est assignée à chaque jeu de paramètres. Cette valeur peut être nulle lorsque le jeu de paramètres donne lieu à un comportement qui n'est pas caractéristique du système. Les interactions entre les différents paramètres ne sont plus un problème puisqu'elles sont implicitement prises en compte dans la valeur de vraisemblance. Il est également possible d'évaluer de la même manière des jeux de conditions initiales, de conditions aux limites ou bien différentes structures de modélisation.

Le terme de *vraisemblance* est employé par Beven & Binley (1992) dans un sens très général de mesure "floue" de la conformité du comportement du modèle au comportement observé du système, et non pas au sens de la théorie du maximum de vraisemblance qui nécessite un certain nombre d'hypothèses spécifiques (erreurs non biaisées, normalement distribuées d'après Sorooshian & Dracup (1980); Sorooshian *et al.* (1983)), non vérifiées ici.

Toutes les simulations qui fournissent une valeur de vraisemblance non nulle sont prises en considération et ré-échantillonnées pour obtenir une fonction de distribution des jeux de paramètres. La recherche d'un jeu optimal unique est le cas extrême de la méthode, pour lequel la solution optimale se voit attribuer une valeur de vraisemblance de 1, tous les autres jeux de paramètres ayant une vraisemblance nulle. Cette valeur de vraisemblance peut donc être employée pour définir les simulations ayant "un comportement correct" dans l'analyse de sensibilité généralisée : cela revient à choisir une valeur seuil en deçà de laquelle les simulations sont considérées comme ayant un comportement incorrect, sur la base de la mesure de vraisemblance choisie.

Ces mesures de vraisemblance peuvent être combinées au moyen du théorème de Bayes⁴

⁴Le théorème de Bayes est une conséquence immédiate de la loi de composition des probabilités (qui est un des axiomes fondamentaux de toute théorie des probabilités). Si A et B sont deux événements, cette loi de composition des probabilités indique que la probabilité $P(A \cap B)$ d'observer à la fois A et B est simplement donnée par :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A) = P(B) P(A/B)$$

où $P(A/B)$ se lit "probabilité d'observer A sachant que B s'est réalisé". Cette équation implique immédiatement :

$$P(A/B) = \frac{P(A) P(B/A)}{P(B)}$$

qui est le théorème de Bayes. Ce théorème se généralise sans peine au cas de plusieurs événements A_i , $i = 1 \dots n$.

lorsque différentes sources d'observations sont disponibles. Les valeurs de vraisemblance ainsi obtenues servent de coefficients de pondération pour estimer l'incertitude associée aux prédictions du modèle. Au fur et à mesure que de nouvelles observations du système physique deviennent disponibles, la fonction de vraisemblance peut être corrigée.

Les étapes de la méthode GLUE sont les suivantes :

1. Définition de la (des) mesure(s) de vraisemblance appropriée(s). Il est bon de noter que ce choix est nécessairement subjectif et que l'intervalle d'incertitude sur les prévisions va en dépendre,
2. Choix de l'intervalle de variation des paramètres recherchés et de leur distribution à l'intérieur de cet intervalle,
3. Choix de la procédure de calcul de l'incertitude sur les prévisions du modèle à partir des coefficients de pondération, fonction de la vraisemblance,
4. Choix de la procédure de correction des coefficients de pondération chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible,
5. Choix de la procédure de calcul permettant d'évaluer l'apport des informations additionnelles à partir de l'incertitude corrigée.

En même temps que le calcul d'incertitude (étape n°3), il est possible d'entreprendre une analyse de sensibilité, selon la démarche expliquée au paragraphe (2.3.1), en utilisant les valeurs de vraisemblance calculées et en choisissant un seuil de vraisemblance comme critère séparant les simulations au comportement correct de celles au comportement incorrect.

2.3.2.2 Définition d'une fonction de vraisemblance

La méthode GLUE requiert le choix d'une mesure de la qualité d'ajustement (goodness-of-fit) afin de pouvoir comparer les observations aux prédictions du modèle. Cette mesure de vraisemblance doit vérifier la condition suivante : elle doit augmenter de façon monotone avec la similitude entre comportement observé et comportement simulé. Quelques exemples de fonctions de vraisemblance adéquates seraient (Beven & Binley, 1992; Beven & Freer, 2001) :

- l'inverse de la somme des carrés des erreurs (Nash & Sutcliffe, 1970) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s &= \sigma_e^{-2} \\ &= \frac{1}{\sum_i (y_i^o - y_i^s)^2}\end{aligned}\tag{2.89}$$

σ_e représente la déviation standard de l'erreur entre observations \mathbf{y}^o et simulations \mathbf{y}^s .

- l'efficacité du modèle :

$$\mathcal{L}_e = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_o^2}, \quad \sigma_e^2 < \sigma_o^2\tag{2.90}$$

σ_o est la déviation standard des observations \mathbf{y}^o ,

$$\mathcal{L}_e = 1 - \frac{\sum_i (y_i^o - y_i^s)^2}{\sum_i (y_i^o - \bar{y}^o)^2}\tag{2.91}$$

- la fonction de vraisemblance utilisée par Binley *et al.* (1991), qui est également basée sur la somme des carrés des erreurs :

$$\mathcal{L}_b = (\sigma_e)^{-N}\tag{2.92}$$

N est un paramètre choisi par l'utilisateur. Dans le cas limite $N \rightarrow +\infty$, la meilleure simulation aura une vraisemblance de 1, les vraisemblances de toutes les autres simulations étant nulles,

- Freer *et al.* (1996) ont, quant à eux, choisi une fonction permettant de mettre à jour la vraisemblance, en présence de nouvelles observations, en donnant des poids égaux à toutes les observations utilisées :

$$\mathcal{L}_f = \exp\left(-N \frac{\sigma_e^2}{\sigma_o^2}\right), \quad \sigma_e^2 < \sigma_o^2 \quad (2.93)$$

N est un paramètre choisi par l'utilisateur. Comme ci-dessus, augmenter la valeur de N équivaut à donner plus de poids aux meilleures simulations,

- lorsque plusieurs types d'observations sont disponibles et qu'il est nécessaire de les combiner, une procédure de pondération automatique appropriée pourrait être :

$$\mathcal{L}_{pml} = \frac{1}{\prod_{j=1}^m \sigma_{e_j}^2} \quad (2.94)$$

m est le nombre d'observations différentes à disposition et j l'indice de sommation sur ces observations, *pml* est le sigle de *pseudo-maximum likelihood*.

2.3.2.3 Distribution des paramètres *a priori*

Une fois la fonction de vraisemblance choisie, l'étape suivante de la méthode GLUE est la définition des distributions initiales des paramètres recherchés. Encore une fois, cette définition, comme celle de la mesure de vraisemblance, fait intervenir une part de subjectivité dans le calcul. Les intervalles initiaux de variation des paramètres doivent être suffisamment larges pour être sûr de couvrir tous les comportements observés. Il est plus fiable de partir d'un intervalle de variation très large, puisque la procédure bayésienne de correction des coefficients de pondération permet de raffiner l'intervalle de variation acceptable chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible.

Selon Beven & Binley (1992), ce problème de définition des distributions initiales des paramètres revient à exprimer une série d'hypothèses reflétant les connaissances *a priori* de l'opérateur sur les valeurs de ces paramètres. Lorsque ces connaissances *a priori* sont pratiquement inexistantes, une distribution uniforme sur un large intervalle de variation peut être une définition de référence appropriée. En effet, dans la pratique, chaque fois qu'une information en terme de comparaison entre réponses observée et simulée est ajoutée, si cette information est valable, la distribution calculée à partir des valeurs de vraisemblance l'emportera sur la distribution uniforme initiale dans le calcul de l'incertitude sur la prévision.

Il est important de souligner que ces procédures sont appliquées à des jeux de paramètres, et non pas aux paramètres individuellement, de façon à prendre en compte implicitement toutes les interactions entre paramètres.

2.3.2.4 Estimation de l'incertitude

Il y a de nombreuses sources d'incertitude possibles dans toute modélisation : erreurs dues à l'inexactitude des conditions aux limites et des variables d'entrée, erreurs associées à l'imprécision des mesures utilisées pour calibrer le modèle, erreurs provenant de la structure de la modélisation choisie, ... La vraisemblance associée à un modèle par la méthode GLUE prend en compte toutes ces causes d'erreurs et permet ainsi de traduire l'incertitude résultante sur les prévisions du modèle.

Le calcul de cette incertitude va évidemment dépendre de la fonction de vraisemblance choisie (§ 2.3.2.2), ce qui peut sembler incohérent à première vue. En réalité, l'opérateur ne peut pas manipuler la fonction de vraisemblance pour faire évoluer la marge d'incertitude à sa guise. En effet, si cette marge est trop étroite, une comparaison avec la réponse observée suggérera que la structure de la modélisation n'est pas adaptée au système étudié, en revanche, si cette marge est

trop large, elle portera à conclure que le modèle n'est pas capable de prédire le comportement recherché. Lorsqu'un seuil de vraisemblance est choisi, toutes les simulations dont la valeur de vraisemblance est inférieure à ce seuil sont rejetées, l'incertitude sur les prévisions va donc également dépendre de l'existence ou non d'un critère de rejet, et de la valeur du seuil.

Qu'il y ait eu ou non rejet de certaines simulations, les valeurs de vraisemblance associées aux jeux de paramètres considérés sont ré-échantillonnées de façon à ce que leur somme soit égale à 1. Ces valeurs ré-échantillonnées sont alors utilisées comme des coefficients de pondération : la valeur de vraisemblance ré-échantillonnée, obtenue à partir d'un jeu de paramètres, est appliquée à la prévision du modèle (variables de sortie) fournie par ce même jeu de paramètres. Il en résulte une distribution cumulative des variables de sortie, à partir de laquelle, une fois le pourcentage choisi, il est possible de calculer l'incertitude sur la prévision du modèle. La figure (2.4) représente le calcul des marges d'incertitude, 10 % et 90 %, ainsi que le calcul de la moyenne, 50 %. Si les observations sortent de la limite des 90 %, cela signifie que les erreurs dues à la modélisation et aux variables d'entrée dépassent les erreurs associées avec le procédé de calibration lui-même (Freer *et al.*, 1996).

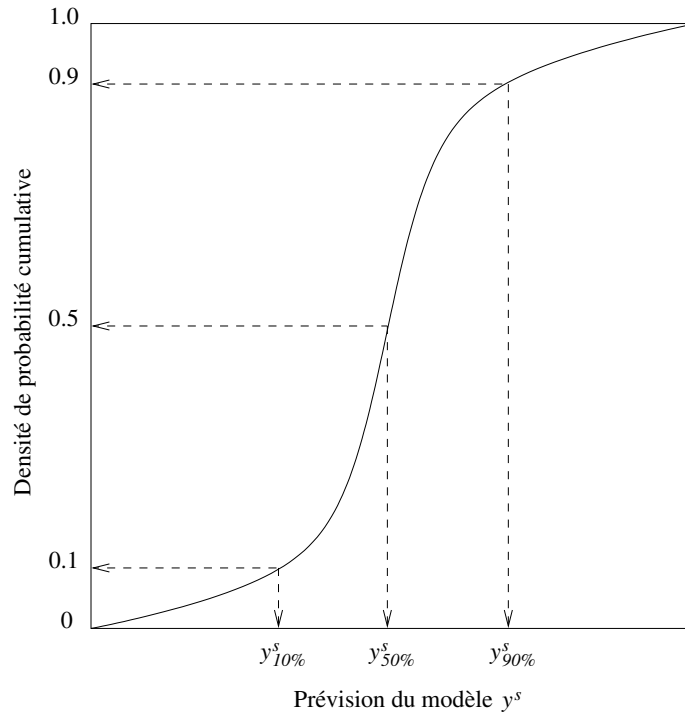


FIG. 2.4 – Calcul des marges d'incertitude sur les prévisions du modèle, limites à 10%, 50% et 90% des simulations

2.3.2.5 Sensibilité à un paramètre

La notion de comparaison entre le comportement observé du système et celui simulé à partir d'une modélisation et d'un jeu de paramètres donné, qui n'avait pas été explicitée au paragraphe précédent (§ 2.3.1), trouve un sens, pour la modélisation hydrologique, dans la définition d'une mesure de vraisemblance. Il devient possible de définir le comportement du système physique de façon binaire : la valeur de vraisemblance associée à une simulation donnée est en-dessus ou en-dessous du seuil choisi. Ce seuil, critère de différentiation entre les deux catégories *behavioural* et *non-behavioural*, est une valeur subjective de la mesure de la qualité d'ajustement. Si les distributions des deux catégories sont différentes, alors le modèle est sensible au paramètre considéré.

Freer *et al.* (1996) proposent une analyse plus détaillée de la sensibilité du modèle, basée sur le même principe. Après avoir séparé l'ensemble des simulations en deux catégories *behavioural* et *non-behavioural*, Freer *et al.* (1996) examinent uniquement les simulations au comportement correct. Ils les divisent en 10 classes contenant le même nombre de simulations, par ordre croissant de valeur de vraisemblance, et tracent les distributions correspondant à chacune de ces 10 classes. Le raisonnement est ensuite le même que celui de Hornberger & Spear (1981), si les distributions de ces catégories sont sensiblement différentes, alors le paramètre considéré influe de façon importante sur le comportement du système.

La figure (2.5) récapitule les différentes étapes des méthodes GSA et GLUE. Dans ce cas particulier, le modèle est très sensible au paramètre x^1 , alors que l'analyse de sensibilité au premier ordre montre une très faible influence de x^2 .

2.3.2.6 Mise à jour de la vraisemblance en présence de nouvelles observations

Lorsque de nouvelles observations sont disponibles, la fonction de distribution associée à un jeu de paramètres peut être mise à jour en utilisant l'équation de Bayes sous la forme :

$$\mathcal{L}_p(\Theta/\mathbf{y}^o) = \mathcal{L}_{\mathbf{y}^o}(\Theta/\mathbf{y}^o) \mathcal{L}_0(\Theta) \quad (2.95)$$

$\mathcal{L}_0(\Theta)$ est la distribution de vraisemblance antérieure du jeu de paramètres Θ , $\mathcal{L}_{\mathbf{y}^o}(\Theta/\mathbf{y}^o)$ est la fonction de vraisemblance du jeu de paramètres Θ calculée à partir des nouvelles observations \mathbf{y}^o et $\mathcal{L}_p(\Theta/\mathbf{y}^o)$ est la nouvelle distribution de vraisemblance du jeu de paramètres Θ . L'équation de Bayes exprimée sous cette forme suppose que la fonction de distribution ait été ré-échantillonnée, de façon à ce que la somme des valeurs de vraisemblance soit égale à 1.

Lors de la première étape de la méthode GLUE, en l'absence d'informations plus précises sur les paramètres cherchés, la distribution a priori $\mathcal{L}_0(\Theta)$ est souvent choisie uniforme. Si une série de simulations Monte-Carlo a déjà été réalisée à partir d'un premier jeu d'observations, la distribution de vraisemblance issue du résultat de ces simulations peut ensuite être utilisée comme distribution a priori lorsqu'un nouveau jeu d'observations est disponible.

Pour un problème bien posé avec des observations précises, la prise en compte de nouvelles observations devrait restreindre les marges d'incertitude. Dans le domaine de la modélisation hydraulique, et dans le cas d'un problème mal posé comme l'estimation de paramètres, cela reste à déterminer.

2.3.2.7 Évaluation de l'apport des nouvelles observations

L'évolution des marges d'incertitude lorsque de nouvelles observations sont disponibles, fournit une mesure de l'apport de ces données dans le processus de calibration. Cela peut se révéler utile, entre autres, pour évaluer l'influence de différents types d'observation sur l'estimation des paramètres cherchés. Dans le domaine de l'hydraulique, il pourrait s'agir de comparer l'estimation d'un coefficient de Strickler, par exemple, obtenue à partir de mesures de cotes d'eau, à celle obtenue à partir d'observations sous forme d'étendue inondée.

Cette évaluation nécessite une mesure "objective" de l'incertitude associée aux prédictions. Selon Beven & Binley (1992), la limite à 90% d'incertitude n'est pas appropriée dans ce cas, car elle est susceptible de refléter les restrictions de l'échantillonnage dues à la méthode de Monte-Carlo. Le mathématicien Claude Shannon définit, dans un cadre probabiliste de sa théorie de l'information (Shannon, 1948), une notion d'entropie :

$$\mathcal{E} = - \sum_i \mathcal{L}_i \log_2 \mathcal{L}_i \quad (2.96)$$

Les vraisemblances \mathcal{L}_i , $i = 1, \dots, m$ sont telles que $\sum_i \mathcal{L}_i = 1$ et m est le nombre total de simulations. L'entropie \mathcal{E} est maximale lorsque toutes les simulations sont équiprobables (distribution

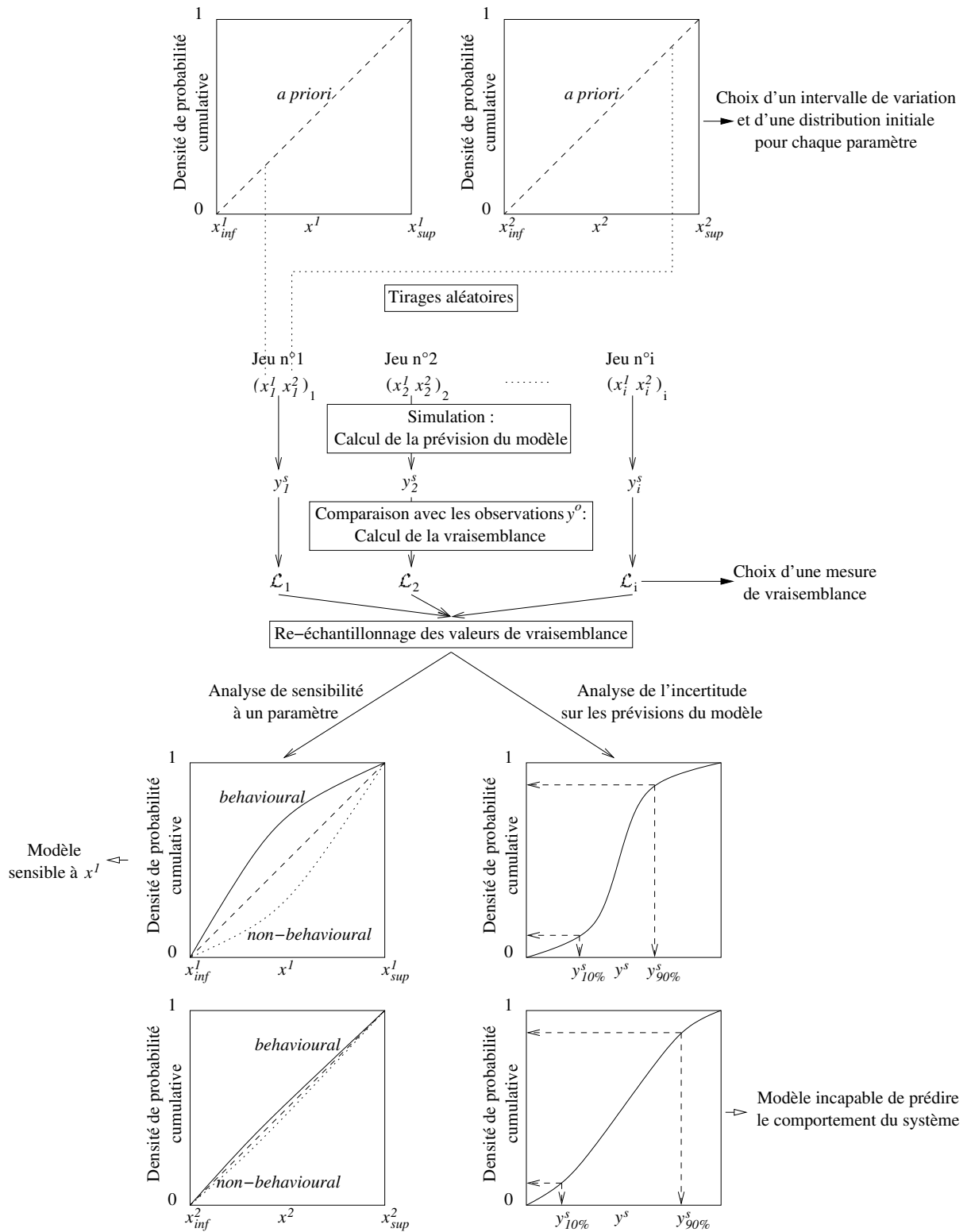


FIG. 2.5 – Principales étapes de l'analyse de sensibilité et du calcul d'incertitude utilisant les méthodes GSA et GLUE

uniforme), et minimale lorsqu'un des événements a une probabilité de 1 : il n'y a plus aucune incertitude (c'est le cas du jeu de paramètres optimal). L'évolution de la valeur de l'entropie \mathcal{E} lorsque de nouvelles observations sont disponibles dépend de la fonction de vraisemblance \mathcal{L} choisie et de l'influence des nouvelles observations sur l'incertitude associée à la prévision du modèle. Il est important de préciser que, dans le cas d'un problème mal posé, la prise en compte de nouvelles observations n'entraîne pas nécessairement une diminution de l'entropie. [Beven & Binley \(1992\)](#) montrent qu'en hydrologie, l'incertitude sur la prévision du modèle peut au contraire augmenter :

It is worth noting that the uncertainty calculated in this way does not always decrease with the addition of further information. This should surely be expected with hydrological models, where further storms with different specific hydrological responses may not always be reproduced by the same sets of parameter values that have appeared optimal up to that time ([Beven & Binley, 1992](#)).

[Freer et al. \(1996\)](#) constatent quant à eux une diminution de l'entropie lors de l'ajout de nouvelles observations. Cette diminution est néanmoins minime :

The results show that for each likelihood measure, the addition of each year of data results in a fall in uncertainty and consequent narrowing of the uncertainty bounds. This fall is however relatively small, which is consistent with our finding that relatively few sets of simulations become “nonbehavioural” as each new year of data is added. It will be interesting to see if this trend continues as further data become available, perhaps with the inclusion of more extreme conditions ([Freer et al., 1996](#)).

Pour un problème mal posé, il n'y a donc pas de généralisation possible quant à l'évolution de la valeur de l'entropie \mathcal{E} lorsque de nouvelles observations sont disponibles. Celle-ci peut augmenter ou diminuer, en fonction du problème considéré et des observations prises en compte, il est nécessaire de s'en assurer au cas par cas.

2.4 Principales difficultés liées à l'assimilation de données en hydraulique

2.4.1 Détermination des erreurs

Les méthodes d'assimilation de données exposées ci-dessus (§ 2.2.1) font intervenir des statistiques d'erreurs qui sont nécessaires à la résolution du problème d'assimilation :

- erreur sur les observations, à travers la matrice de variance-covariance d'erreur \mathbf{R} ,
- erreur modèle, de matrice de variance-covariance \mathbf{Q} . [Le Dimet & Blum \(2002\)](#) soulignent le fait que cette appellation regroupe en réalité les erreurs dues à la représentation du processus physique (paramétrisation, simplification, ...), mais aussi les erreurs de discrétisation, ainsi que celles liées à l'algorithmique numérique (erreurs de troncature par exemple),
- erreur sur l'estimation initiale ou ébauche, de matrice de variance-covariance \mathbf{P} .

Ces erreurs sont supposées connues à travers leurs matrices de variance-covariance respectives. Ce n'est pas le cas en pratique et il est nécessaire de faire certaines hypothèses, sur la forme de ces matrices notamment, pour pouvoir modéliser ces erreurs.

Erreurs d'observations Les erreurs d'observations sont souvent supposées non corrélées entre elles, ce qui permet de travailler avec une matrice \mathbf{R} diagonale, la configuration la plus simple étant de choisir la matrice identité :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{p \times p} \quad (2.97)$$

L'hypothèse d'erreurs non corrélées n'est pas valable dans le cas de données issues de la télédétection : le même instrument aéroporté ou spatial réalise toutes les mesures, les erreurs sont donc nécessairement corrélées (Castaings *et al.*, 2003). En revanche, dans le cas de données ponctuelles réalisées par des instruments différents, cette hypothèse semble raisonnable (Bouttier & Courtier, 1999).

Erreurs modèle Dans le cas réel, il n'est pas possible d'avoir une connaissance objective de l'erreur modèle, car l'état et la dynamique du système sont inconnus (Bertino, 2001). Une approximation de cette erreur est donc généralement estimée au cas par cas, en fonction de l'adéquation de la prévision du modèle avec la dynamique observée du système. Pour ce faire, il est bien sûr nécessaire de disposer de suffisamment de données pour espérer obtenir une comparaison valable. Il peut ainsi être possible de déterminer la principale source d'erreur modèle et d'adapter la forme de la matrice \mathbf{Q} en fonction de cette information.

Erreurs sur l'ébauche Il existe plusieurs méthodes empiriques basées sur l'étude des prévisions fournies par une analyse donnée mais leur fondement théorique n'est pas toujours très explicite (Bouttier & Courtier, 1999). Une méthode simple et fiable d'estimation des variances d'erreur est celle de Hollingsworth & Lonnberg (1986), malheureusement elle repose sur l'existence d'un réseau d'observations suffisamment dense et étendu pour être en mesure de fournir des informations pouvant être considérées comme non-corrélées. Dans le domaine de l'hydraulique, les mesures en période de crue ne sont pas faciles à mettre en oeuvre et il est très rare de posséder des informations sur plus de trois événements, ce qui rend cette méthode inapplicable.

La connaissance des erreurs sur les données et sur l'ébauche est très importante dans l'ensemble des méthodes d'assimilation. Le filtre de Kalman présente l'avantage de propager la matrice de variance-covariance d'erreur \mathbf{P} (Eq. 2.70), ce qui permet d'accéder à l'erreur associée à l'analyse produite (Equipe PALM, 1998). Néanmoins, le problème lié à l'initialisation de cette matrice reste entier.

2.4.2 Non-linéarité du modèle

La façon de traiter le problème d'assimilation lorsque le modèle est non-linéaire a été évoquée précédemment (§ 2.2.2.3 et 2.2.3.2) : ces méthodes permettent d'aborder des dynamiques non linéaires. Il est cependant bon de garder à l'esprit qu'en présence d'un modèle non-linéaire, la fonction coût (Eq. 2.46) ne sera pas nécessairement convexe. La convergence de l'algorithme de minimisation, si elle a lieu, peut donc se faire vers un minimum local. La détermination d'une "bonne solution" est alors conditionnée par la valeur initiale du paramètre, c'est-à-dire le point de départ de l'algorithme : il faut que celui-ci soit relativement proche du minimum global (Le Dimet & Blum, 2002). Si ce n'est pas le cas, il est possible que l'optimisation débouche sur une solution mathématiquement correcte mais physiquement aberrante, d'où l'intérêt d'introduire des intervalles de variation physiquement cohérents pour les paramètres recherchés.

En ce qui concerne le filtre de Kalman, il a été spécifié (§ 2.2.3.2) que son extension aux modèles non-linéaires, le filtre de Kalman étendu, ne fournit de résultats satisfaisants que lorsque le modèle dynamique ne présente pas de trop fortes non-linéarités. Dans le cas contraire, il est susceptible de présenter des instabilités, voire de diverger complètement (Hoteit, 2001). D'autres variantes du filtre de Kalman peuvent alors se révéler plus appropriées. Une nouvelle voie d'investigation consiste en particulier à utiliser des méthodes stochastiques de type Monte-Carlo pour estimer l'évolution de la matrice de variance-covariance d'erreur sur la prévision (Eq. 2.68). Cette approche, appelée filtre de Kalman d'ensemble, permet ainsi d'éviter la linéarisation du modèle (Bertino, 2001) :

The Ensemble Kalman filter [...] is expected to be particularly useful when large non-linearities and discontinuities are present, e.g. in the case of flooding and drying of tidal areas (Madsen & Cañizares, 1999).

2.5 Conclusions

Attendu qu'en pratique il n'est généralement pas possible de mesurer les paramètres nécessaires à la simulation d'un système physique donné directement à l'échelle requise par le modèle, ces paramètres doivent être "calibrés". Il est possible d'employer à cette fin différentes techniques d'assimilation de données qui permettent d'estimer un jeu de paramètres optimal, c'est-à-dire un jeu de paramètres qui minimise l'écart, au sens du critère d'erreur choisi, entre observations et simulations. Néanmoins, cette notion de paramètres optimaux présente certaines limitations qu'il est bon de garder à l'esprit. En particulier, le concept d'équifinalité (cf. § 2.1 et 2.3) peut être résumé de la façon suivante : il est possible que différentes modélisations et différents jeux de paramètres, pour une modélisation donnée, puissent reproduire de façon satisfaisante le comportement observé du système étudié. En d'autres termes, une solution "optimale" pour un événement donné peut ne plus l'être pour d'autres événements. Selon Beven & Freer (2001), cette équifinalité serait inhérente à la modélisation de systèmes environnementaux complexes.

The result is that uncertainty is generic to the application of environmental models and that it might be difficult to decide between competing model representations (both model structures and sets of effective parameter values) of environmental systems (Beven, 2004).

Dans un cadre d'apprentissage, plutôt que de choisir un seul jeu de paramètres optimal, il serait préférable d'assigner à chaque jeu de paramètres une valeur de vraisemblance, représentative de l'adéquation des grandeurs simulées à partir de ce jeu de paramètres aux grandeurs observées. En revanche, dans un cadre de prévision en temps réel, le processus d'assimilation de données permet de compenser les erreurs inhérentes à la structure du modèle, ainsi que les erreurs sur les entrées, ce qui est le but recherché.

Deuxième partie

Expériences jumelles

Chapitre 3

Introduction et méthodologie des expériences jumelles

Sommaire

3.1	Méthodologie des expériences jumelles	64
3.1.1	Principe	64
3.1.2	Génération des données	64
3.2	Techniques d'estimation mises en oeuvre dans le cas d'un écoulement permanent	65
3.2.1	Minimisation d'un critère d'erreur	65
3.2.2	Filtre de Kalman étendu	67
3.3	Technique d'estimation mise en oeuvre dans le cas d'un écoulement non permanent	68
3.4	Synthèse	68

Les objectifs de ce chapitre sont :

- de présenter la méthodologie des expériences jumelles qui va être mise en oeuvre dans cette deuxième partie,
- de décrire, en se basant sur les notions abordées au chapitre 2, les deux méthodes d'assimilation de données qui vont être appliquées dans le cadre des expériences jumelles.

Ce travail de thèse est constitué de deux étapes principales. La première, abordée dans cette partie sur les expériences jumelles, comprend une série de tests, réalisés à partir de données fictives. Le but de cet examen préliminaire est d'expérimenter la faisabilité de l'identification de paramètres hydrauliques à partir d'informations susceptibles d'être fournies par l'observation de la terre. Plusieurs situations ont été considérées, en faisant varier le nombre et le type de paramètres à estimer, ainsi que la précision des données (chapitres 4 et 5). En se basant sur les résultats obtenus, une méthode a ensuite été choisie pour être mise en oeuvre sur des données issues de l'imagerie aérienne, ce qui constitue la deuxième étape de l'étude (chapitres 7 et 8).

3.1 Méthodologie des expériences jumelles

Afin de pouvoir étudier quelques aspects fondamentaux de l'estimation des paramètres intervenant dans un modèle hydrodynamique, il est nécessaire de connaître la "vraie" valeur de ces paramètres. Lorsque ces paramètres sont estimés à partir de mesures in situ, cette "vraie" valeur n'est généralement pas connue. D'autre part, lorsque des observations sont disponibles pour un cours d'eau donné, elles ne concernent souvent qu'un ou deux événements et il est difficile d'obtenir des informations fiables et quantitatives sur leur qualité et leur précision. Étant données ces circonstances, l'utilisation de données synthétiques présente les avantages suivants (Khatibi *et al.*, 2001) :

- la "vraie" valeur des paramètres est connue,
- la qualité des données peut être formulée de manière quantitative,
- les caractéristiques des événements exploités peuvent être contrôlées,
- il n'y a pas de limite au nombre d'observations disponibles.

Toutefois, les données synthétiques ne peuvent pas remplacer les données issues de la télédétection. Elles ne permettent bien évidemment pas de rendre compte de tous les aspects de la modélisation d'un système physique complexe. Néanmoins, dans le cadre d'une étude préliminaire, le modèle peut être testé à partir de données générées numériquement, afin de le mettre au point et d'expérimenter de façon théorique différentes situations. Il est ensuite nécessaire de le confronter à des données d'observation de la terre.

3.1.1 Principe

La procédure des expériences jumelles consiste à générer artificiellement des données à partir des grandeurs simulées par le modèle. Ces données synthétiques se veulent ici représentatives du type d'information que l'imagerie aérienne et/ou spatiale est susceptible de fournir. Elles sont introduites en tant que telles dans le processus d'assimilation. Le procédé est constitué de deux étapes parallèles d'intégration du modèle (Fig. 3.1), d'où la terminologie d'expériences jumelles.

Ces étapes sont les suivantes :

- Un jeu de valeurs "vraies" des paramètres à estimer est choisi. Connaissant ces paramètres, le modèle hydrodynamique fournit l'état du système correspondant, c'est-à-dire la largeur au miroir le long du cours d'eau ou bien la cote d'eau par exemple. C'est cet état du système qui va servir de base à la génération des observations : ces valeurs numériques sont bruitées de façon à imiter la nature des informations fournies par la télédétection,
- Une méthode d'assimilation de données est ensuite mise en oeuvre afin d'estimer les paramètres cherchés à partir de l'état du système bruité.

3.1.2 Génération des données

L'état "vrai" du système est bruité au moyen d'un bruit gaussien $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma)$, de moyenne $\mu = 0$ nulle et d'écart-type σ donné. La précision des observations ainsi obtenues varie en fonction de σ , qui est également appelé *niveau de bruit*. Différents niveaux de bruit σ ont été utilisés

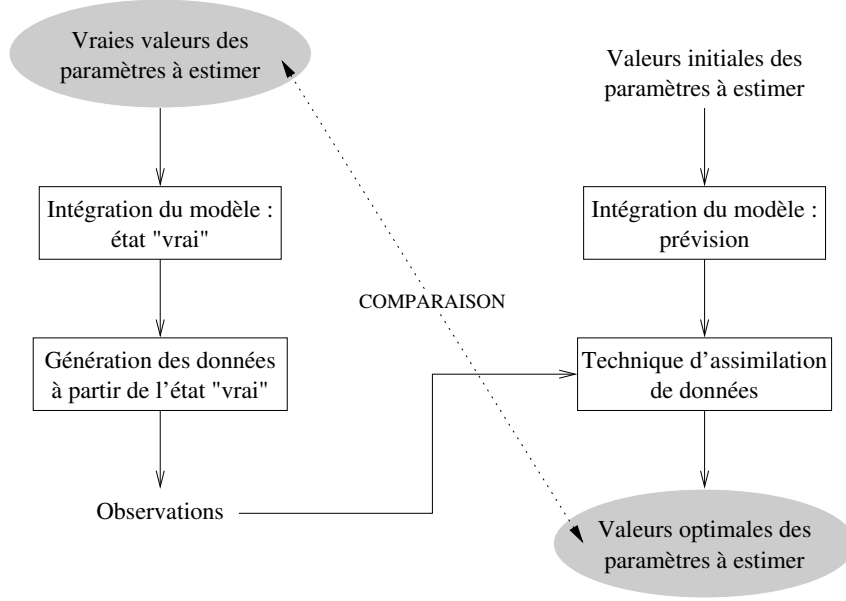


FIG. 3.1 – Méthodologie des expériences jumelles

pour générer les données, afin d'étudier l'impact des erreurs d'observation sur l'estimation des paramètres. Pour chaque niveau de bruit, un certain nombre de tirages est effectué, afin de pouvoir dégager un comportement moyen.

L'ajout de bruit permet de reproduire les incertitudes inhérentes aux observations seulement : le modèle est donc supposé parfait.

3.2 Techniques d'estimation mises en oeuvre dans le cas d'un écoulement permanent

3.2.1 Minimisation d'un critère d'erreur

La méthodologie mise en oeuvre s'apparente à celle détaillée au paragraphe (2.2.2.3). Cependant, dans le cas des expériences jumelles, toutes les observations sont disponibles en même temps puisqu'elles sont générées numériquement. De plus, les paramètres recherchés ne varient pas d'une observation à une autre, il s'agit de paramètres considérés comme constants. Dans le processus d'assimilation, il est donc possible de prendre en compte toutes les observations en une seule fois. La fonction coût minimisée représente donc la distance, au sens du critère d'erreur choisi, entre simulations et observations, et ce pour tous les événements considérés. En se basant sur les travaux de Khatibi *et al.* (2001), trois expressions de fonctions coûts différentes ont été testées :

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left(\mathbf{y}^o|_j^k - \mathcal{H}(\mathbf{x})|_j^k \right)^2 \quad (3.1)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left(\frac{\mathbf{y}^o|_j^k - \mathcal{H}(\mathbf{x})|_j^k}{\mathbf{y}^o|_j^k} \right)^2 \quad (3.2)$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left(\frac{\mathbf{y}^o|_j^k - \mathcal{H}(\mathbf{x})|_j^k}{\mathcal{H}(\mathbf{x})|_j^k} \right)^2 \quad (3.3)$$

k est l'indice de sommation sur les observations, il varie de 1 à K , K étant le nombre total d'observations disponibles. j est l'indice spatial. Il varie de 1 à J , J étant le nombre de points de calcul, c'est-à-dire le nombre de sections en travers dans le cas de la modélisation monodimensionnelle.

Ces fonctions coûts sont basées sur le critère d'erreur de Nash & Sutcliffe (1970) qui est fréquemment utilisé en hydrologie. Φ_1 représente la somme des carrés des erreurs entre simulations et observations, exprimée en mètre carré : c'est le critère quadratique correspondant à la méthode des moindres carrés classique. Φ_2 et Φ_3 sont adimensionnelles. Dans l'expression de Φ_2 , la somme des carrés des erreurs entre simulations et observations est normée par le carré des observations, dans l'expression de Φ_3 , elle est normée par le carré des grandeurs simulées.

L'apport principal de la télédétection en période de crue étant la délimitation surfacique des zones inondées, les observations \mathbf{y}^o seront constituées de largeurs de la zone inondée, notées \mathbf{B}^o :

$$\mathbf{y}^o = \mathbf{B}^o \quad (3.4)$$

L'opérateur d'observations \mathcal{H} , qui relie les paramètres à estimer \mathbf{x} aux grandeurs observées $\mathbf{B} = \mathcal{H}(\mathbf{x})$, comporte donc deux étapes (Fig. 3.2) :

- le calcul du couple d'inconnus, le débit Q et la hauteur d'eau H , par résolution du système d'équations différentielles de Saint-Venant à partir des paramètres \mathbf{x} . L'expression de ces équations va dépendre du type de modélisation choisi (1D ou 2D, permanent ou non permanent, ...),
- le calcul de la largeur au miroir B , par projection de la hauteur d'eau H sur la section en travers.

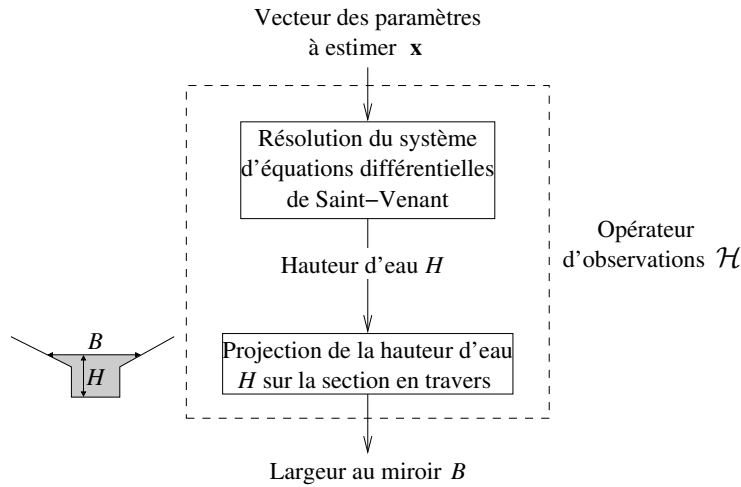


FIG. 3.2 – Opérateur d'observation \mathcal{H}

Dans les chapitres suivants, pour des raisons de commodité d'écriture, le vecteur des observations \mathbf{y}^o , constitué de largeurs de la zone inondée, sera noté \mathbf{B}^o et le vecteur $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ des largeurs au miroir simulées à partir des paramètres à estimer sera noté \mathbf{B}^s . Les expressions des trois fonctions coûts deviennent donc :

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left(\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k \right)^2 \quad (3.5)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left(\frac{\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k}{\mathbf{B}^o|_j^k} \right)^2 \quad (3.6)$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left(\frac{\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k}{\mathbf{B}^s|_j^k} \right)^2 \quad (3.7)$$

L'algorithme de minimisation utilisé s'apparente à celui décrit au paragraphe (2.2.2.4). Il s'agit d'un problème d'optimisation non linéaire. Des contraintes, sous forme d'intervalles de variation pour les paramètres à estimer, pourront éventuellement être introduites, selon les cas.

3.2.2 Filtre de Kalman étendu

La méthodologie mise en oeuvre est celle détaillée au paragraphe (2.2.3.3). Une première série de tests ayant montrée que le filtre de Kalman étendu convergeait rarement en partant d'une initialisation quelconque, la procédure suivante a été envisagée (Fig. 3.3) :

- en partant des valeurs de \mathbf{x} choisies comme initialisation de la méthode, une première étape consiste à minimiser une fonction coût représentant la distance à un premier jeu d'observation :

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \left(\mathbf{y}^o|_j - \mathcal{H}(\mathbf{x})|_j \right)^2 \quad (3.8)$$

- dans une deuxième étape, le résultat de cette minimisation est utilisé comme ébauche (\mathbf{x}_0^a) pour mettre en oeuvre le filtre de Kalman étendu (Fig. 3.4). L'opérateur d'observations \mathcal{H} étant non linéaire (cf. Fig. 3.2), il est nécessaire de le linéariser pour pouvoir utiliser le filtre de Kalman étendu (§ 2.2.3.2) : \mathbf{H}_k désigne le gradient de $\mathcal{H}(k, \mathbf{x})$, calculé au point \mathbf{x}_k^f , l'indice k est relatif au jeu d'observations considéré.

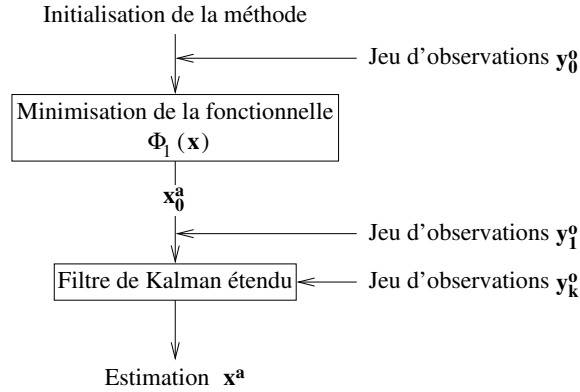


FIG. 3.3 – Étapes de la méthode

Les matrices \mathbf{P} et \mathbf{R} sont particulièrement délicates à déterminer (cf. § 2.4.1). En l'absence d'informations supplémentaires, le choix se porte sur des matrices diagonales proportionnelles à la valeur des ébauches et des observations. Le choix le plus simple pour \mathbf{R} est la matrice identité $\mathbf{I}_{p \times p}$. En ce qui concerne la matrice \mathbf{P} , l'avantage du filtre de Kalman étendu est d'estimer directement la matrice de variance-covariance d'erreur sur l'état analysé \mathbf{P}^a , à partir de la matrice de variance-covariance d'erreur sur la prévision \mathbf{P}^f . Il est cependant nécessaire de fournir une estimation initiale \mathbf{P}_0^a pour \mathbf{P} . C'est également la matrice identité $\mathbf{I}_{n \times n}$ qui a été choisie.

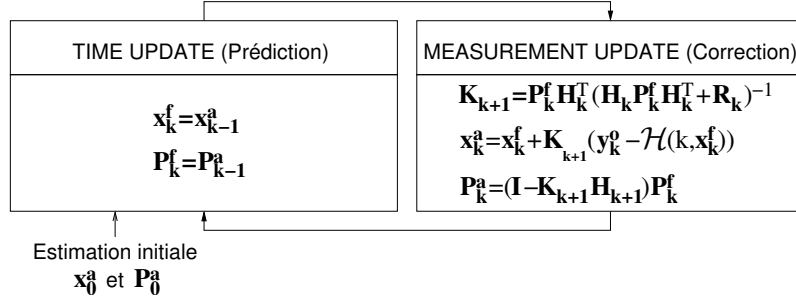


FIG. 3.4 – Filtre de Kalman étendu, appliqué à l’estimation de paramètres en régime permanent, l’indice k est relatif à l’observation considérée

3.3 Technique d’estimation mise en oeuvre dans le cas d’un écoulement non permanent

Après analyse des résultats obtenus pour un écoulement monodimensionnel permanent, seule la minimisation d’un critère d’erreur a été mise en oeuvre dans le cas d’un écoulement non permanent.

Si les paramètres recherchés sont des paramètres hydrauliques, comme le débit par exemple, ils peuvent varier d’une observation à une autre. Il n’est donc plus possible de prendre en compte toutes les observations en une seule fois comme au paragraphe (3.2.1). La fonction coût utilisée est minimisée à chaque fois qu’une observation est disponible, c’est-à-dire, dans cette étude, à chaque pas de temps :

$$\Phi_1(\mathbf{x}_{t_k}) = \sum_{j=1}^J \left(\mathbf{y}_{t_k}^o|_j - \mathcal{H}(\mathbf{x}_{t_k})|_j \right)^2 \quad (3.9)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}_{t_k}) = \sum_{j=1}^J \left(\frac{\mathbf{y}_{t_k}^o|_j - \mathcal{H}(\mathbf{x}_{t_k})|_j}{\mathbf{y}_{t_k}^o|_j} \right)^2 \quad (3.10)$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}_{t_k}) = \sum_{j=1}^J \left(\frac{\mathbf{y}_{t_k}^o|_j - \mathcal{H}(\mathbf{x}_{t_k})|_j}{\mathcal{H}(\mathbf{x}_{t_k})|_j} \right)^2 \quad (3.11)$$

\mathbf{x}_{t_k} est le vecteur des paramètres recherchés, à l’instant $t = t_k$, j est l’indice spatial de sommation sur les sections de calcul, $\mathbf{y}_{t_k}^o$ est le vecteur des observations à l’instant $t = t_k$. L’opérateur d’observations \mathcal{H} présente les mêmes étapes que dans le cas d’un écoulement permanent (Fig. 3.2), seul change le système d’équations différentielles à résoudre pour déterminer le couple d’inconnus (Q, H) : il s’agit cette fois des équations de Saint-Venant décrivant un écoulement monodimensionnel en régime non permanent (Eq. 1.26). La méthode de minimisation employée est la même qu’au paragraphe (3.2.1).

3.4 Synthèse

Les expériences jumelles constituent un bon moyen d’étudier la faisabilité d’un projet, en l’occurrence l’estimation de paramètres intervenant dans la résolution des équations de Saint-Venant, à partir de données issues de la télédétection. La valeur “vraie” des paramètres recherchés étant connue, il est possible de juger quantitativement de la précision de l’estimation en fonction de la méthode utilisée. Générer les données permet par ailleurs d’en contrôler l’incertitude et

donc d'évaluer la précision des observations nécessaire à une estimation correcte des paramètres. De plus, il est possible de tester différents types de données (Ex. : observations sous forme de cotes d'eau, de largeurs au miroir, . . .), afin de déterminer quels paramètres peuvent être estimés à partir d'une catégorie d'observations.

Les résultats de ces expériences jumelles servent ensuite à mettre au point une méthodologie adaptée à la reconstitution de paramètres, dans un cas réel cette fois. Bien entendu, de nombreuses difficultés supplémentaires surgiront lors de la mise en oeuvre sur un site d'étude, et il sera probablement nécessaire d'ajuster la méthode. Néanmoins, les expériences jumelles auront permis d'en jeter les bases.

Chapitre 4

Cas d'un écoulement monodimensionnel permanent

Sommaire

4.1	Description du problème	72
4.2	Reconstitution de quatre paramètres	74
4.2.1	Cas tests	75
4.2.2	Résultats obtenus : minimisation d'une fonction coût	77
4.2.3	Résultats obtenus : filtre de Kalman étendu	81
4.2.4	Comparaison des différentes méthodes	85
4.2.4.1	Filtre de Kalman étendu et minimisation d'une fonction coût prenant en compte toutes les observations disponibles	85
4.2.4.2	Filtre de Kalman étendu et minimisation d'une fonction coût prenant en compte les observations une par une	86
4.2.5	Intervalle de confiance	87
4.2.5.1	Définition et méthode de calcul	87
4.2.5.2	Présentation des résultats	88
4.2.6	Analyse de sensibilité	90
4.2.7	Conclusions	95
4.3	Reconstitution de six paramètres	95
4.3.1	Description des cas testés	96
4.3.2	Résultats obtenus	96
4.3.3	Analyse de sensibilité	100
4.4	Conclusions	104

Ce chapitre regroupe les résultats obtenus lors de l'estimation de quatre, puis six paramètres, dans le cas d'un écoulement monodimensionnel permanent. Ces résultats sont le fruit :

- de l'application des méthodes d'assimilation décrites au chapitre précédent (chapitre 3),
- d'une analyse de sensibilité du modèle aux paramètres recherchés, basée sur la Generalized Sensitivity Analysis de [Hornberger & Spear \(1981\)](#). Cette analyse permet de tester l'identifiabilité de ces paramètres, selon la terminologie mise en place au paragraphe (2.1).

Parmi l'ensemble des paramètres nécessaires à la modélisation hydraulique, quelques-uns d'entre eux peuvent, dans certains cas, être considérés comme invariants en temps et en espace, sans nuire gravement à la qualité de la modélisation. Le coefficient de Strickler est l'exemple qui vient immédiatement à l'esprit. Chercher à estimer des paramètres stationnaires en temps et en espace peut paraître un cas de figure très simplifié, néanmoins, en l'absence des données nécessaires, cette hypothèse d'uniformité est souvent utilisée par les hydrauliciens. Elle semble donc constituer une première étape cohérente dans l'étude de la faisabilité de l'estimation de paramètres hydrauliques.

4.1 Description du problème

Dans ce chapitre, les paramètres à estimer sont constants dans le temps et dans l'espace. L'écoulement est monodimensionnel, permanent, sans débit d'apport, ni de fuite :

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad (4.2)$$

Q est le débit ($m^3.s^{-1}$), H est la hauteur d'eau moyenne comptée à partir du fond du lit (m), I est la pente du fond du lit ($m.m^{-1}$), J est la pente de la ligne d'énergie ($m.m^{-1}$), calculée à l'aide de la formule de Manning-Strickler : $J = \frac{Q|Q|}{K_s^2 S^2 R_H^{4/3}}$, K_s est le coefficient de Strickler ($m^{1/3}.s^{-1}$), S est la surface mouillée, c'est-à-dire l'aire de la section transversale occupée par le fluide (m^2), R_H est le rayon hydraulique (m), quotient de la surface mouillée S par le périmètre mouillé P_w : $R_H = \frac{S}{P_w}$, Fr est le nombre de Froude : $Fr^2 = \frac{Q^2 B}{g S^3}$, B est la largeur au miroir, c'est-à-dire la largeur de la section transversale à la surface libre (m) et x est l'abscisse curviligne (m).

Les équations sont du premier ordre en x , une seule condition à la limite est donc nécessaire pour chaque variable Q et H . Cette étude se limite au cas des écoulements infracritiques ($Fr < 1$), la condition est donc donnée à la limite aval du tronçon considéré : c'est la loi de fonctionnement d'un déversoir à seuil épais en régime dénoyé qui a été choisie comme condition à la limite. Un déversoir est un écoulement au dessus d'un seuil, ce dernier étant défini par sa hauteur de pelle P et sa forme (Fig. 4.1). Le régime d'écoulement est dit dénoyé lorsqu'il y a passage par le niveau critique H_c à l'aval du seuil. Dans ce cas, le débit sur le déversoir est fixé par l'écoulement amont, le niveau aval ne participe pas à la loi de fonctionnement qui s'exprime de la façon suivante :

$$Q = \mu_D L_{seuil} (H_{av} - P) \sqrt{2g(H_{av} - P)} \quad (4.3)$$

Q est le débit à l'amont du seuil ($m^3.s^{-1}$), μ_D est appelé coefficient de débit, c'est un paramètre adimensionnel qui dépend de la géométrie du seuil. Pour un seuil épais de section rectangulaire, la littérature fournit $\mu_D = 0.38$. L_{seuil} est la largeur du seuil (m), H_{av} est la hauteur d'eau au niveau du seuil (m) et P est la hauteur du seuil, appelée hauteur de pelle (m). Finalement :

$$H_{av} = \left(\frac{Q}{\mu_D L_{seuil} \sqrt{2g}} \right)^{2/3} + P \quad (4.4)$$

La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 a été appliquée ici pour résoudre le système d'équations différentielles (4.1, 4.2).

Les observations \mathbf{y}^o sont constituées de largeurs au miroir, qui sont les largeurs de la zone inondée, bruitées au moyen d'un bruit gaussien, comme expliqué au paragraphe (3.1.2) :

$$\mathbf{y}^o = \mathbf{B}^o \quad (4.5)$$

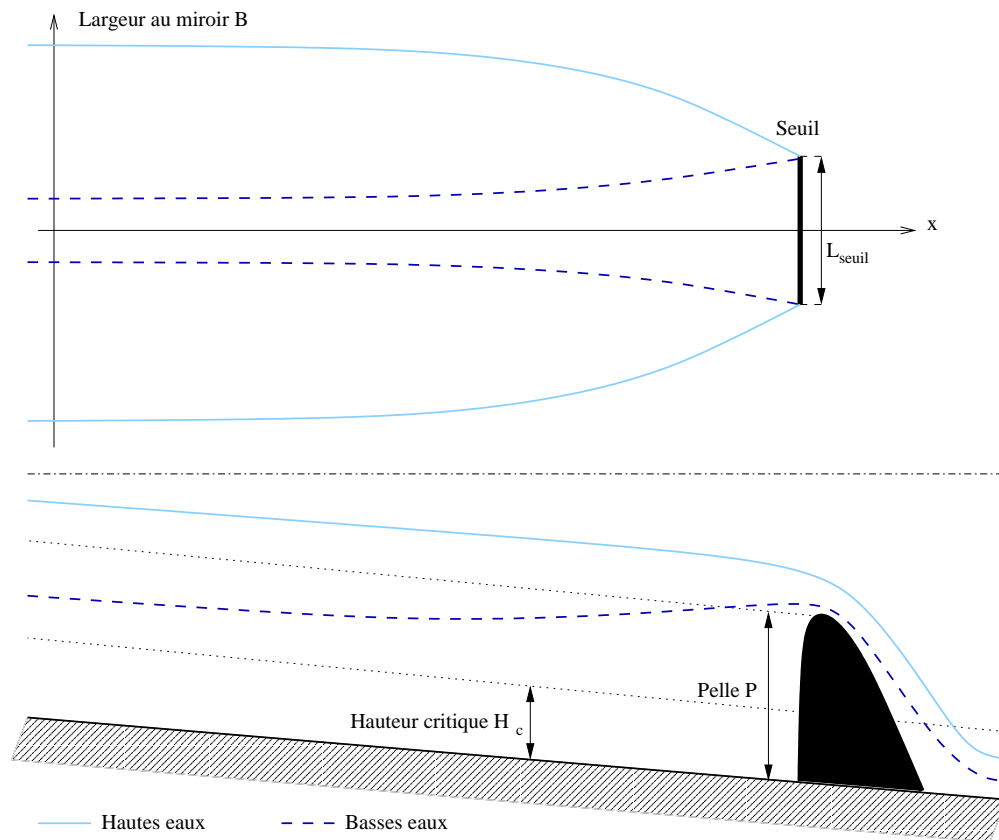


FIG. 4.1 – Écoulement dénoyé au dessus d'un seuil épais

4.2 Reconstitution de quatre paramètres

Le cours d'eau simplifié étudié présente un lit mineur rectangulaire et un lit majeur pratiquement plat. La rugosité est supposée identique en lit mineur et en lit majeur. La figure (4.2) représente la géométrie de ce cours d'eau simplifié. Le tronçon étudié a pour longueur L , $I = \sin\theta$ est la pente du fond ($m.m^{-1}$), B_0 la largeur au radier ou largeur du fond du lit (m), H_{lim} est la profondeur du lit mineur (m) et m_{maj} le fruit des berges du lit majeur, c'est-à-dire la pente transversale du lit majeur ($m.m^{-1}$). Tous ces paramètres peuvent varier le long du cours d'eau, mais ici ils ont été pris constants sur toute la longueur du tronçon.

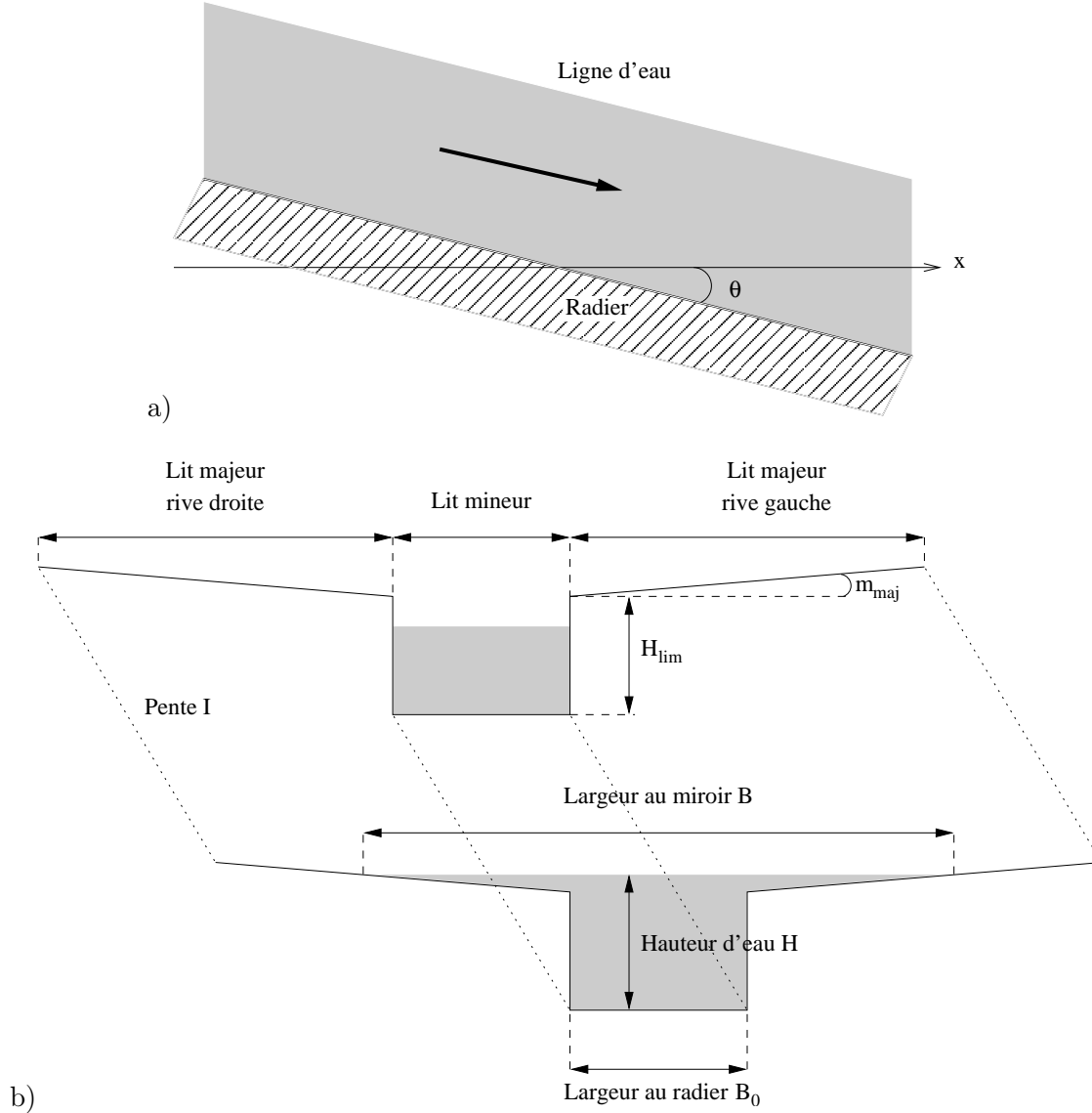


FIG. 4.2 – Cours d'eau étudié : a) Profil en long, b) Profil en travers

Les paramètres à estimer sont les suivants :

- le coefficient de Strickler K_s ($m^{1/3}.s^{-1}$),
- la pente du fond I ($m.m^{-1}$),
- la profondeur du lit mineur H_{lim} (m),
- la pente transversale du lit majeur m_{maj} ($m.m^{-1}$).

Le vecteur de l'état du système \mathbf{x} est donc de dimension $(4, 1)$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} K_s \\ I \\ H_{lim} \\ m_{maj} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Les observations consistent en un vecteur des largeurs de la zone inondée le long du tronçon considéré.

4.2.1 Cas tests

Étant données les caractéristiques du cours d'eau, lorsque l'écoulement commence à déborder en lit majeur, une faible variation de hauteur d'eau entraîne une importante variation de l'étendue de la plaine inondée. Afin de rendre compte de ce phénomène, deux types d'événements de caractéristiques différentes ont été considérés :

- **Cas n°1** : l'écoulement ne déborde en lit majeur que sur une partie du tronçon considéré,
- **Cas n°2** : l'écoulement déborde en lit majeur tout le long du tronçon considéré.

Les valeurs des différents paramètres des cas tests n°1 et n°2 sont récapitulées dans le tableau (4.1). La figure (4.3) montre les largeurs au miroir \mathbf{B} avant bruitage pour les cas 1 et 2, chaque courbe correspond à un débit.

			Cas n°1	Cas n°2
Paramètres connus	Débits (Chaque valeur correspond à un jeu d'observations)		$390 \text{ m}^3.s^{-1}$	$200 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$400 \text{ m}^3.s^{-1}$	$280 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$410 \text{ m}^3.s^{-1}$	$300 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$420 \text{ m}^3.s^{-1}$	$320 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$430 \text{ m}^3.s^{-1}$	$370 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$440 \text{ m}^3.s^{-1}$	$400 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$450 \text{ m}^3.s^{-1}$	$460 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$460 \text{ m}^3.s^{-1}$	$500 \text{ m}^3.s^{-1}$
	Longueur du tronçon	L	10^4 m	
	Pas d'espace	Δx	10 m	
	Largeur du fond du lit	B_0	200 m	100 m
	Hauteur du seuil aval	P	2.2 m	2.4 m
Paramètres à estimer	Coefficient de Strickler	K_s	$30 \text{ m}^{1/3}.s^{-1}$	$20 \text{ m}^{1/3}.s^{-1}$
	Pente du fond	I	$5 \times 10^{-4} \text{ m.m}^{-1}$	
	Profondeur du lit mineur	H_{lim}	3 m	
	Pente transversale du lit majeur	m_{maj}	10^3 m.m^{-1}	

TAB. 4.1 – Paramètres des deux cas tests

Chaque jeu d'observations est donc un vecteur de largeurs au miroir bruitées \mathbf{B}^o de dimension $(1001, 1)$, généré à partir du vecteur de largeurs au miroir réelles \mathbf{B}^t :

$$\mathbf{B}^o = \mathbf{B}^t + \gamma \times \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma) \quad (4.7)$$

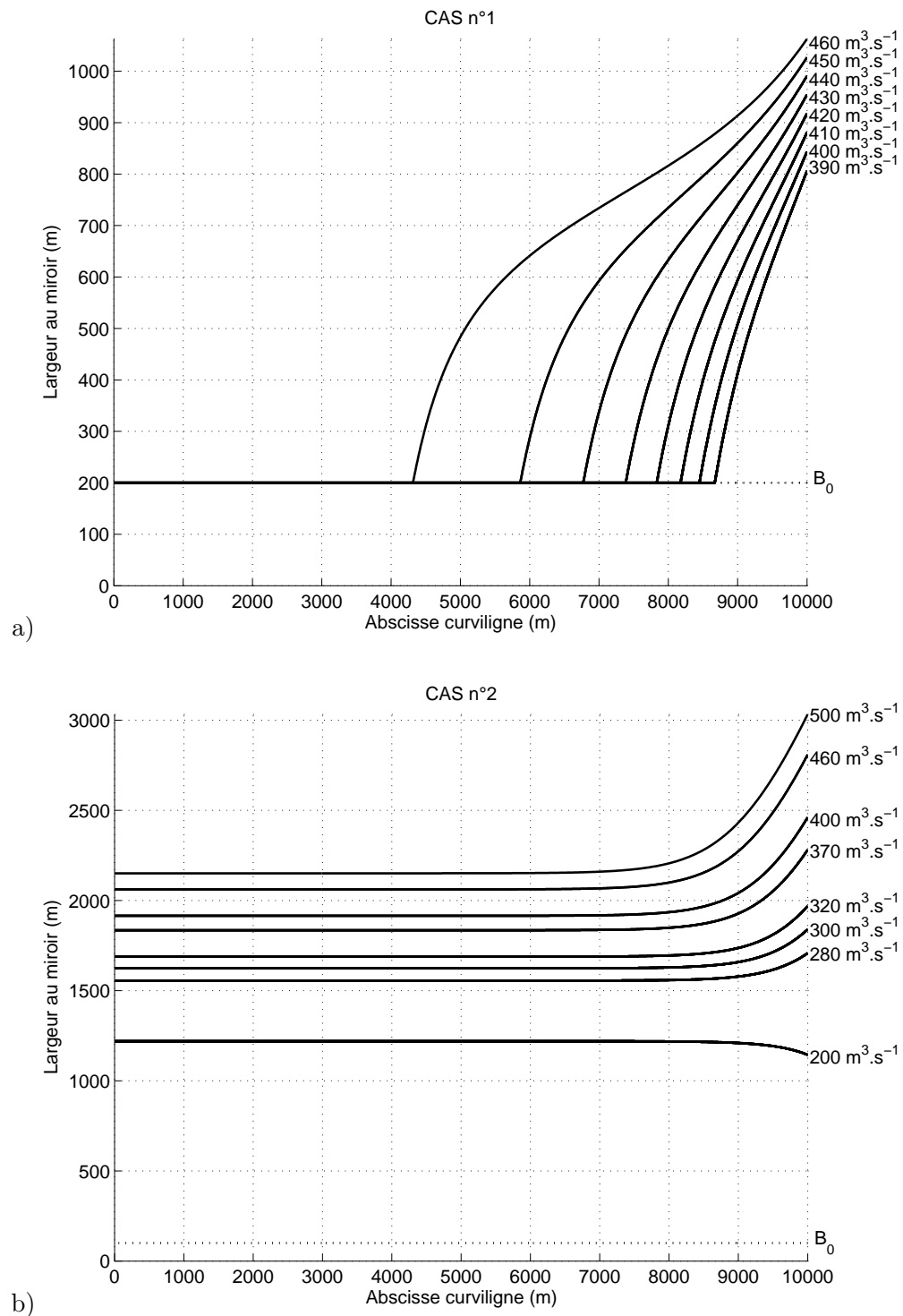


FIG. 4.3 – Largeurs de la zone inondée a) cas test n°1, b) cas test n°2

γ est un coefficient déterminant l'amplitude du bruitage. Le niveau de bruit σ correspond à l'écart-type du bruit au sein d'un échantillon. Six niveaux de bruit ont été testés, ils sont récapitulés dans le tableau (4.2), ainsi que les variations induites sur les largeurs au miroir.

	Niveau de bruit σ	Erreur induite sur \mathbf{B}	Écart-type	Erreur RMS
Cas n°1	0.006	0.96 m	1.2 m	0.4 %
	0.012	1.92 m	2.4 m	0.8 %
	0.018	2.88 m	3.6 m	1.2 %
	0.024	3.80 m	4.8 m	1.6 %
	0.030	4.80 m	6.0 m	2.0 %
	0.036	5.75 m	7.2 m	2.3 %
Cas n°2	0.006	0.96 m	1.2 m	0.06 %
	0.012	1.92 m	2.4 m	0.11 %
	0.018	2.88 m	3.6 m	0.17 %
	0.024	3.84 m	4.8 m	0.22 %
	0.030	4.81 m	6.0 m	0.28 %
	0.036	5.74 m	7.2 m	0.33 %

TAB. 4.2 – Niveaux de bruit et variations moyennes de \mathbf{B} correspondantes, $\gamma = 200 m$

Pour chaque débit, et pour chaque niveau de bruit σ , cinq échantillons ont été générés au moyen d'un bruitage aléatoire. Chaque échantillon correspond à un événement. Sauf mention contraire, les résultats présentés par la suite sont en fait la moyenne des résultats obtenus sur les cinq échantillons.

4.2.2 Résultats obtenus : minimisation d'une fonction coût

Les trois fonctions coûts minimisées représentent la distance, au sens du critère d'erreur choisi, entre simulations et observations, et ce pour les huit événements considérés :

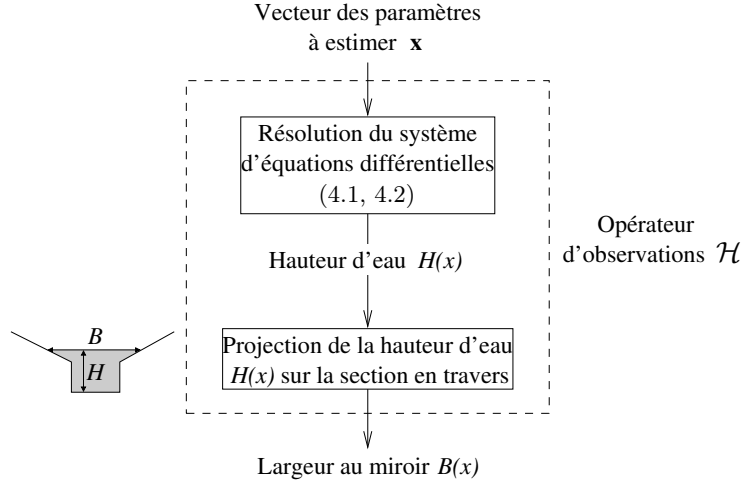
$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\mathbf{B}^o|_j^k - \mathcal{H}(\mathbf{x})|_j^k \right)^2 \quad (4.8)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\frac{\mathbf{B}^o|_j^k - \mathcal{H}(\mathbf{x})|_j^k}{\mathbf{B}^o|_j^k} \right)^2 \quad (4.9)$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\frac{\mathbf{B}^o|_j^k - \mathcal{H}(\mathbf{x})|_j^k}{\mathcal{H}(\mathbf{x})|_j^k} \right)^2 \quad (4.10)$$

k est l'indice de sommation sur les observations, il varie de 1 à 8, 8 étant le nombre total d'observations disponibles. L'indice spatial j varie de 1 à 1001, 1001 étant le nombre total de sections de calcul. L'opérateur d'observations \mathcal{H} , qui relie les paramètres à estimer \mathbf{x} aux grandeurs observées $\mathbf{B} = \mathcal{H}(\mathbf{x})$, comporte deux étapes (Fig. 4.4) :

- le calcul de la hauteur d'eau le long du tronçon étudié $H(x)$, par résolution du système d'équations différentielles (4.1, 4.2), à partir des paramètres \mathbf{x} ,
- le calcul de la largeur au miroir le long du tronçon étudié $B(x)$, par projection de la hauteur d'eau $H(x)$ sur la section en travers.


 FIG. 4.4 – Opérateur d'observation \mathcal{H} , en régime permanent

En notant \mathbf{B}^s le vecteur $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ des largeurs au miroir simulées à partir des paramètres à estimer, les expressions des trois fonctions coûts deviennent :

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k \right)^2 \quad (4.11)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\frac{\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k}{\mathbf{B}^o|_j^k} \right)^2 \quad (4.12)$$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\frac{\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k}{\mathbf{B}^s|_j^k} \right)^2 \quad (4.13)$$

L'algorithme de minimisation utilisé est celui décrit au paragraphe (2.2.2.4). Il s'agit d'un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte. En ce qui concerne l'initialisation de la méthode de minimisation itérative, deux jeux de valeurs ont été testés, afin d'étudier l'influence du point de départ sur la valeur optimale obtenue (Tab. 4.3) :

- **Jeu n°1** : valeurs initiales proches des valeurs “vraies”,
- **Jeu n°2** : valeurs initiales éloignées des valeurs “vraies”.

		Valeur initiale \mathbf{x}^{init}	
		Jeu n°1	Jeu n°2
Coefficient de Strickler	K_s	$25 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$	$40 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$
Pente du fond	I	$10^{-4} \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	$10^{-3} \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$
Profondeur du lit mineur	H_{lim}	2.5 m	1.5 m
Pente transversale du lit majeur	m_{maj}	$990 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	$700 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$

TAB. 4.3 – Valeurs des paramètres à estimer servant à initialiser la minimisation

A titre d'exemple, le tableau (4.4) donne les valeurs initiales des trois fonctions coûts correspondant aux jeux de valeurs initiales n°1 et 2, pour un niveau de bruit $\sigma = 0.024$. Une première

remarque peut être faite en comparant ces valeurs initiales : dans le cas n°1, la valeur initiale des trois fonctions coûts avec le jeu n°1 est plus élevée qu’avec le jeu n°2, alors que le jeu n°1 est plus proche des valeurs vraies. Cette constatation est également valable pour Φ_1 et Φ_2 dans le cas test n°2. Il y a vraisemblablement compensation entre les contributions des différents paramètres, de telle sorte que la largeur au miroir simulée à partir du jeu initial n°2 est plus proche de la largeur au miroir réelle que celle simulée à partir du jeu n°1, bien que le jeu n°1 soit plus proche des valeurs vraies des paramètres que le jeu n°2.

	Cas n°1		Cas n°2	
Fonction coût	Jeu n°1	Jeu n°2	Jeu n°1	Jeu n°2
$\Phi_1 \text{ (m}^2\text{)}$	3.134×10^{10}	2.873×10^9	7.078×10^9	5.640×10^9
Φ_2	6.760×10^5	3.290×10^4	2.192×10^3	1.819×10^3
Φ_3	5.900×10^3	3.230×10^3	9.276×10^2	5.952×10^3

TAB. 4.4 – Valeurs initiales de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 correspondant aux jeux d’initialisation n°1 et 2, pour un niveau de bruit $\sigma = 0.024$

	Cas n°1		Cas n°2	
Fonction coût	Jeu n°1	Jeu n°2	Jeu n°1	Jeu n°2
$\Phi_1 \text{ (m}^2\text{)}$	1.831×10^5	1.827×10^5	1.850×10^5	1.850×10^5
Φ_2	1.033×10^3	3.575	0.065	0.065
Φ_3	3.482	3.520	0.065	0.065

TAB. 4.5 – Valeurs finales de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , pour un niveau de bruit $\sigma = 0.024$, jeux d’initialisation n°1 et 2

Le tableau (4.5) fournit les valeurs finales, après minimisation, des trois fonctions coûts, pour un niveau de bruit $\sigma = 0.024$. La liste exhaustive des valeurs initiales et finales des trois fonctions coûts pour tous les niveaux de bruit est exposée à l’annexe B, § (B.1.1) et (B.1.2). En se basant seulement sur ces valeurs finales, les résultats obtenus paraissent satisfaisants, exception faite de la minimisation de Φ_2 dans le cas n°1, à partir du jeu n°1. Pour une analyse plus approfondie, il est nécessaire de se pencher sur le détail des valeurs produites par la minimisation de chaque fonctionnelle. La figure (4.5) présente les valeurs optimales des paramètres obtenues par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , pour le cas test n°2, à partir du jeu de valeurs initiales n°1, et pour les six niveaux de bruit. Chaque point est une moyenne effectuée sur cinq tirages, comme expliqué au paragraphe (4.2.1).

L’intérêt principal des expériences jumelles est de pouvoir comparer l’état analysé \mathbf{x}^a , obtenu par minimisation de la fonction coût, avec l’état réel du système \mathbf{x}^t . Il est ainsi possible de calculer directement l’erreur relative de l’analyse par rapport à l’état réel :

$$\delta_{\mathbf{x}}^a = \left\| \frac{\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t}{\mathbf{x}^t} \right\| \quad (4.14)$$

L’erreur relative de l’initialisation de la minimisation \mathbf{x}^{init} (jeux n°1 et 2, Tab. 4.3), par rapport à l’état réel \mathbf{x}^t , est notée $\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}}$:

$$\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}} = \left\| \frac{\mathbf{x}^{\text{init}} - \mathbf{x}^t}{\mathbf{x}^t} \right\| \quad (4.15)$$

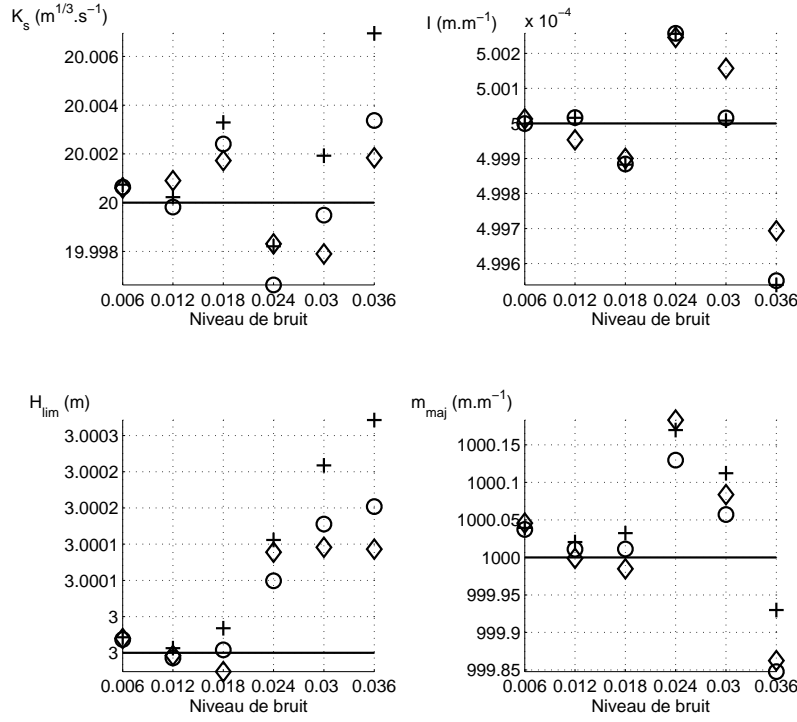


FIG. 4.5 – Valeurs des paramètres estimées avec $\diamond \Phi_1$, $+$ Φ_2 , $\circ \Phi_3$, $—$ Valeur vraie, cas test n°2, jeu de valeurs initiales n°1

L'annexe B, § (B.2), expose les valeurs de $\delta_{\mathbf{x}}^a$ obtenues dans l'ensemble des configurations testées. Les tableaux (4.6) et (4.7) présentent les valeurs de l'erreur relative sur l'état analysé $\delta_{\mathbf{x}}^a$ pour les cas tests n°1 et 2 respectivement, lorsque le niveau de bruit est fixé à $\sigma = 0.024$.

Paramètre	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$		
	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3
K_s	25.0 %	0.16 %	13.3 %	0.33 %
I	80.0 %	0.28 %	13.0 %	0.62 %
H_{lim}	16.7 %	0.02 %	20.6 %	0.04 %
m_{maj}	1.00 %	0.10 %	1.10 %	0.22 %

Paramètre	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$		
	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3
K_s	100 %	0.02 %	1.70 %	0.71 %
I	100 %	0.04 %	3.09 %	1.31 %
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.23 %	0.10 %
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	1.39 %	0.57 %

TAB. 4.6 – Erreur relative sur l'état analysé $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.024$

Lorsque les observations assimilées concernent un écoulement débordant en lit majeur sur toute la longueur du tronçon étudié (cas n°2), le pourcentage d'erreur sur la valeur estimée est

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$		
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3
K_s	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.02 %
I	80.0 %	0.00 %	0.05 %	0.05 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %
m_{maj}	1.00 %	0.02 %	0.02 %	0.01 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$		
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3
K_s	33.3 %	0.00 %	0.00 %	0.02 %
I	100 %	0.05 %	0.05 %	0.05 %
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %
m_{maj}	30.0 %	0.02 %	0.02 %	0.01 %

 TAB. 4.7 – Erreur relative sur l'état analysé $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.024$

inférieur à 0.05 % pour tous les paramètres, quelle que soit la fonction coût minimisée et quel que soit le jeu de valeurs initiales choisi (jeux n° 1 et 2). En revanche, lorsque les observations assimilées concernent un écoulement débordant en lit majeur sur une partie seulement du tronçon étudié (cas n°1), l'erreur relative sur l'état analysé varie fortement en fonction de la fonction coût utilisée et du jeu de valeurs initiales. Φ_1 et Φ_3 fournissent des valeurs satisfaisantes pour les deux jeux de valeurs initiales ($\delta_{\mathbf{x}}^a|_{\Phi_1} \leq 0.28$ % et $\delta_{\mathbf{x}}^a|_{\Phi_3} \leq 1.31$ %). Φ_2 fournit des résultats satisfaisants avec le jeu n°2 ($\delta_{\mathbf{x}}^a|_{\Phi_2} \leq 3.09$ %) mais pas avec le jeu n°1 : $\delta_{H_{lim}}^a|_{\Phi_2} = 20.6$ %. En effet, il n'y a aucune garantie sur la convexité de la fonction coût : étant donné que le modèle hydrodynamique choisi est fortement non linéaire, ces fonctionnelles sont susceptibles d'avoir plusieurs minima locaux. Dans ce cas de figure, selon l'initialisation de l'algorithme choisie, la minimisation peut aboutir à un résultat qui ne soit pas satisfaisant (Fig. 4.6). C'est vraisemblablement le cas de Φ_2 avec comme jeu de valeurs initiales le jeu n°1. Cette analyse est confirmée par le fait qu'en partant d'un autre point de l'espace des paramètres (jeu n°2), pourtant plus éloigné de l'état vrai, le résultat obtenu est meilleur (Fig. 4.7).

De manière générale, les résultats sont meilleurs dans le cas test n°2, ce qui semble logique. En effet, lorsque l'écoulement a lieu en lit mineur, ce qui est déterminé par la valeur de H_{lim} , la largeur au miroir B est égale à la largeur au radier B_0 , qui est connue, et ce quels que soient le coefficient de Strickler K_s , la pente du fond I et la pente transversale du lit majeur m_{maj} . Pour le but recherché, il y a donc comparativement moins d'informations dans les observations du cas test n°1 que dans les observations du cas test n°2.

4.2.3 Résultats obtenus : filtre de Kalman étendu

Les valeurs d'initialisation choisies sont identiques à celles du paragraphe précédent (§ 4.2.2), récapitulées dans le tableau (4.3) :

- **Jeu n°1** : valeurs initiales proches des valeurs “vraies”,
- **Jeu n°2** : valeurs initiales éloignées des valeurs “vraies”.

La figure (4.8) montre les estimations des paramètres obtenues à l'aide du filtre de Kalman étendu pour deux niveaux de bruit, $\sigma = 0.012$ et $\sigma = 0.024$, correspondant à une erreur moyenne sur la largeur au miroir d'environ $\pm 2 m$ et $\pm 4 m$ respectivement (cf. Tab. 4.2). Les observations

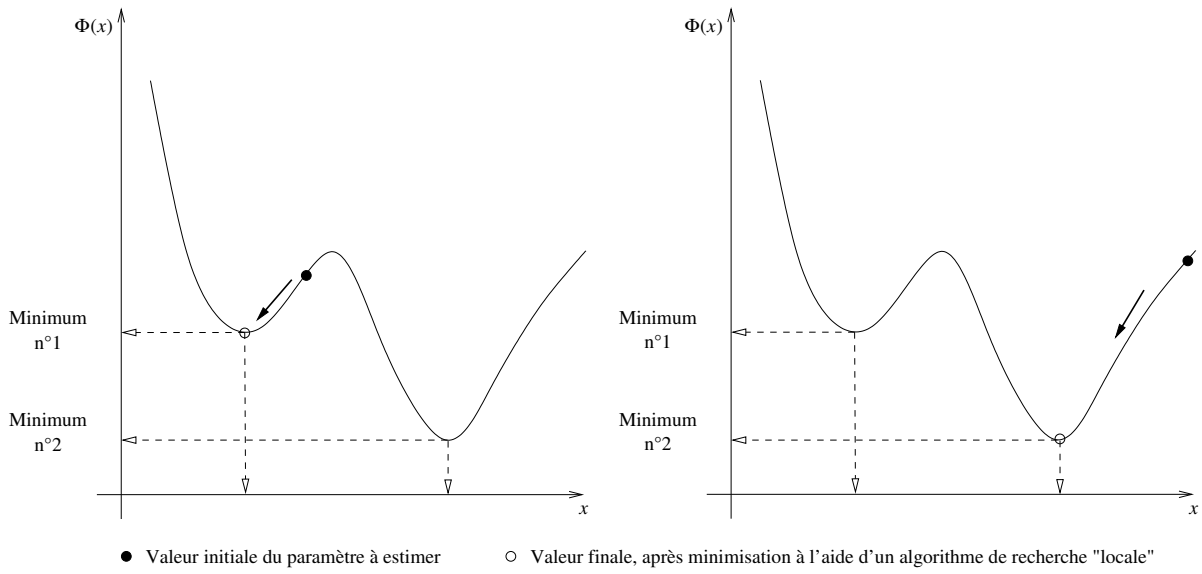


FIG. 4.6 – Illustration en 2D du fonctionnement des méthodes de minimisation "locales", lorsque la fonctionnelle à minimiser n'est pas convexe sur l'ensemble du domaine de définition

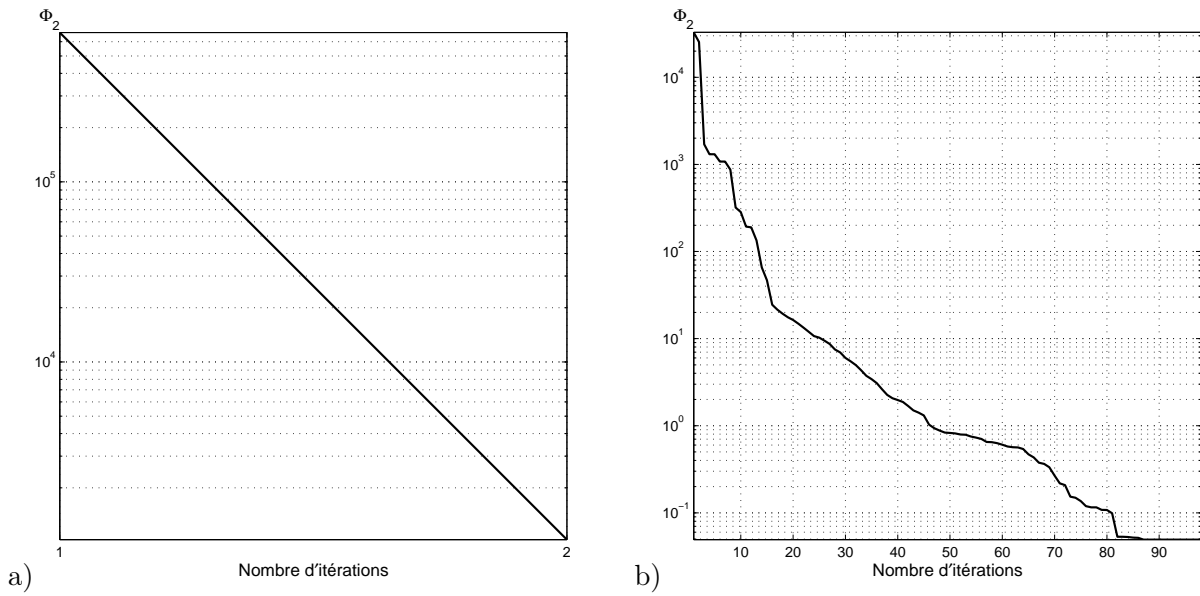


FIG. 4.7 – Évolution de Φ_2 en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme de minimisation dans le cas test n°1, $\sigma = 0.006$, a) jeu initial n°1, b) jeu initial n°2

ont été introduites dans le processus d'assimilation par ordre de débit décroissant. Les valeurs des estimations indiquées sur la figure (4.8) représentent la moyenne sur les cinq tirages testés. L'étalement des résultats obtenus pour chaque tirage est relativement faible comme le montre la figure (4.9) qui fournit les valeurs obtenues pour chaque tirage lorsque $\sigma = 0.024$.

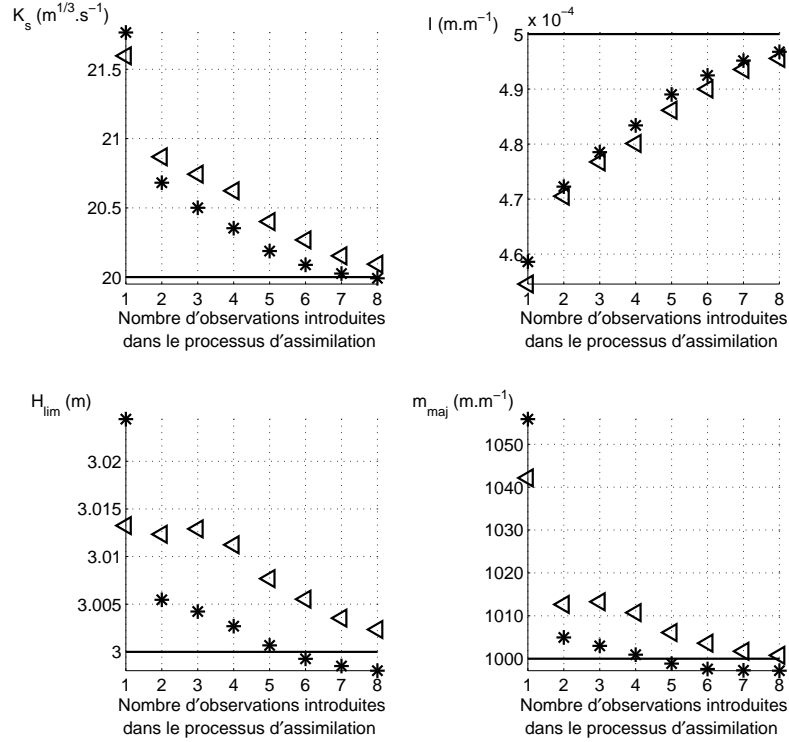


FIG. 4.8 – Valeurs des paramètres estimées avec le filtre de Kalman étendu pour $\triangleleft \sigma = 0.012$, $\ast \sigma = 0.024$, cas test n°2, jeu de valeurs initiales n°1, — Valeur vraie

Ces résultats semblent montrer que l'introduction d'une nouvelle observation améliore l'estimation obtenue. Ainsi, pour un niveau de bruit $\sigma = 0.012$, l'estimation de la pente transversale du lit majeur m_{maj} passe de $1042 m.m^{-1}$, après assimilation de la première observation, à $1013 m.m^{-1}$ après assimilation de la deuxième observation, et ainsi de suite jusqu'à $1001 m.m^{-1}$ après assimilation de la dernière observation.

Le fait d'introduire les observations une par une dans le processus d'assimilation a une influence non négligeable sur le résultat. En effet, l'estimation produite dépend de cet ordre d'introduction, comme le confirme la figure (4.10) qui compare les valeurs obtenues en introduisant les observations par ordre de débit croissant et par ordre de débit décroissant pour un niveau de bruit $\sigma = 0.006$.

Un autre inconvénient de cette méthode est qu'elle ne converge pas toujours. En effet, le calcul du gain de Kalman \mathbf{K}_k (Eq. 2.86) nécessite l'inversion de la matrice $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$. Si les valeurs de cette matrice sont telles que son déterminant est très faible, elle est proche d'une matrice singulière et le calcul de son inverse peut se révéler instable, d'où l'absence de convergence de la méthode.

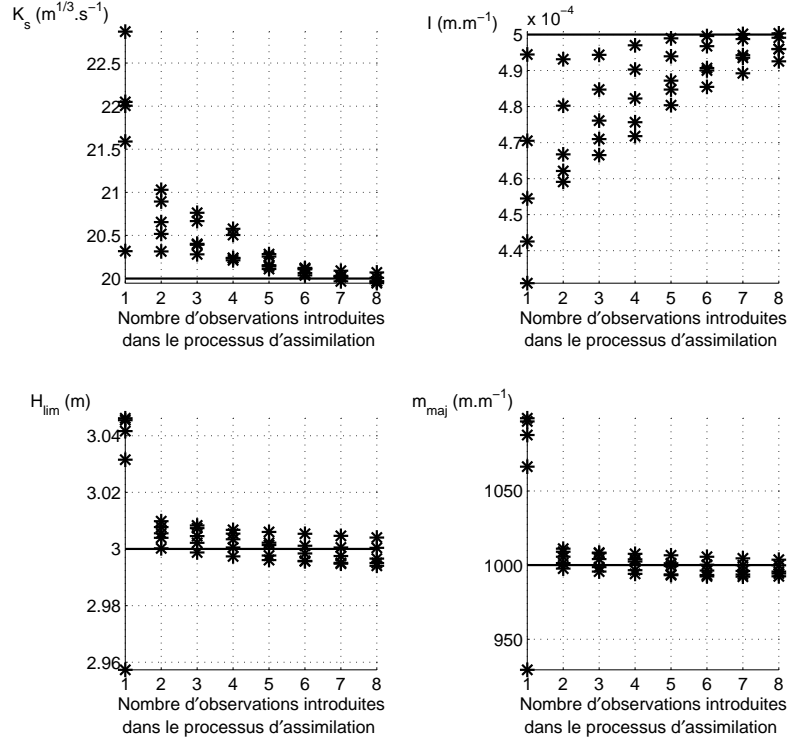


FIG. 4.9 – Valeurs des paramètres estimées avec le filtre de Kalman étendu pour chaque tirage, * $\sigma = 0.024$, cas test n°2, jeu de valeurs initiales n°1, — Valeur vraie

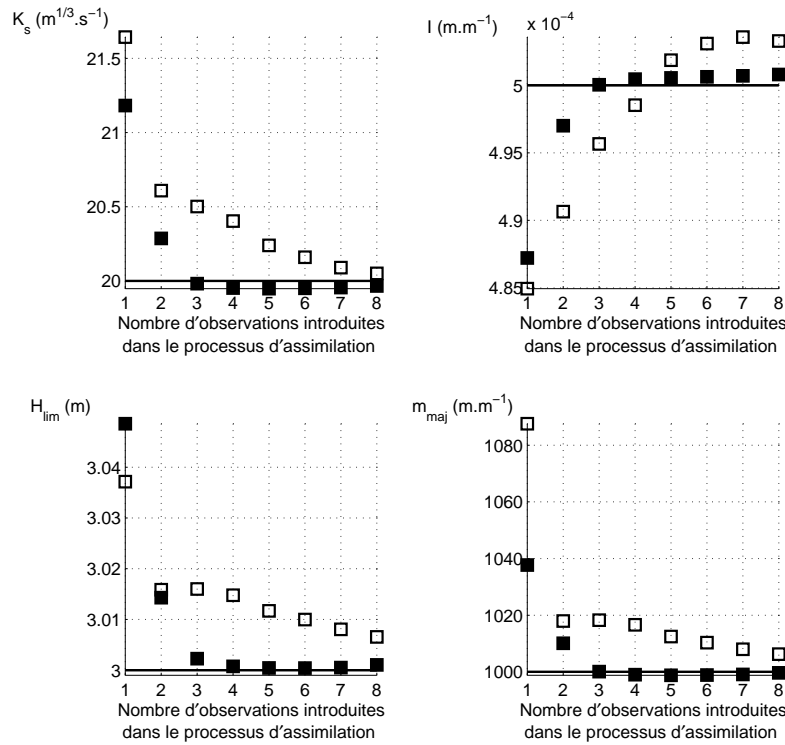


FIG. 4.10 – Influence de l'ordre d'introduction des observations sur les valeurs des paramètres estimées avec le filtre de Kalman étendu, $\sigma = 0.006$, cas test n°2, jeu de valeurs initiales n°1, □ Ordre de débit croissant, ■ Ordre de débit décroissant, — Valeur vraie

4.2.4 Comparaison des différentes méthodes

4.2.4.1 Filtre de Kalman étendu et minimisation d'une fonction coût prenant en compte toutes les observations disponibles

A partir des valeurs des paramètres estimées (l'état analysé \mathbf{x}^a), le modèle hydrodynamique choisi permet de calculer les vecteurs de hauteurs d'eau \mathbf{H}^a et de largeurs au miroir \mathbf{B}^a le long du cours d'eau. Afin de comparer ces grandeurs simulées avec les grandeurs “vraies”, les erreurs relatives sont calculées de la façon suivantes :

$$\delta_B^a = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \left[\frac{1}{1001} \sum_{j=1}^{1001} \left| \frac{\mathbf{B}^t|_j^k - \mathbf{B}^a|_j^k}{\mathbf{B}^t|_j^k} \right| \right] \quad (4.16)$$

$$\delta_H^a = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \left[\frac{1}{1001} \sum_{j=1}^{1001} \left| \frac{\mathbf{H}^t|_j^k - \mathbf{H}^a|_j^k}{\mathbf{H}^t|_j^k} \right| \right] \quad (4.17)$$

k est l'indice de sommation sur les observations, j est l'indice spatial. Les exposants t et a désignent respectivement les grandeurs “vraies” (t pour “true”) et celles obtenues par résolution du modèle à partir des valeurs estimées des paramètres (a pour “analysed”). L'annexe B, § (B.3), donne les valeurs de δ_B^a et δ_H^a pour l'ensemble des tests réalisés. Le tableau (4.8) présente les valeurs de δ_B^a et δ_H^a obtenues pour les deux cas testés, pour un niveau de bruit $\sigma = 0.024$. EKF est l'abréviation de filtre de Kalman étendu, il n'a convergé pour aucun tirage dans le cas test n°2, en utilisant le jeu de valeurs initiales n°2.

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	0.01 %	0.03 %
		Φ_2	18.6 %	9.00 %
		Φ_3	0.02 %	0.06 %
		EKF	3.91 %	1.80 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.16 %	0.33 %
		Φ_3	0.11 %	0.16 %
		EKF	1.60 %	4.99 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	0.05 %	0.02 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	-	-

TAB. 4.8 – Erreur relative moyenne sur les grandeurs simulées à partir de l'état analysé, $\sigma = 0.024$ (EKF : Filtre de Kalman étendu)

Le filtre de Kalman étendu fournit des résultats moins satisfaisants que la minimisation de Φ_1 et Φ_3 dans tous les cas considérés. La minimisation de Φ_2 donne également de meilleurs résultats, à part dans le cas test n°1, avec le jeu de valeurs initiales n°1, particularité qui a déjà été abordée ci-dessus (§ 4.2.2). Les performances du filtre de Kalman étendu sont donc comparativement moins bonnes que la minimisation d'une fonction coût. Le modèle hydrodynamique

étant fortement non linéaire, ce résultat peut s'expliquer par l'obligation de linéariser l'opérateur d'observation \mathcal{H} avant d'appliquer les équations du filtre de Kalman. En effet, [Bouttier & Courtier \(1999\)](#) évoquent la possible nécessité d'inclure des termes de correction empiriques dans la linéarisation en cas d'importantes non linéarités. Une alternative serait d'utiliser une méthode de prédiction plus générale comme le filtre de Kalman d'ensemble, basé sur des simulations Monte-Carlo. Les grandeurs simulées à partir des paramètres estimés à l'aide du filtre de Kalman étendu avec le jeu initial n°1 sont néanmoins satisfaisantes dans les deux cas tests ($\delta_B^a \leq 3.91\%$).

4.2.4.2 Filtre de Kalman étendu et minimisation d'une fonction coût prenant en compte les observations une par une

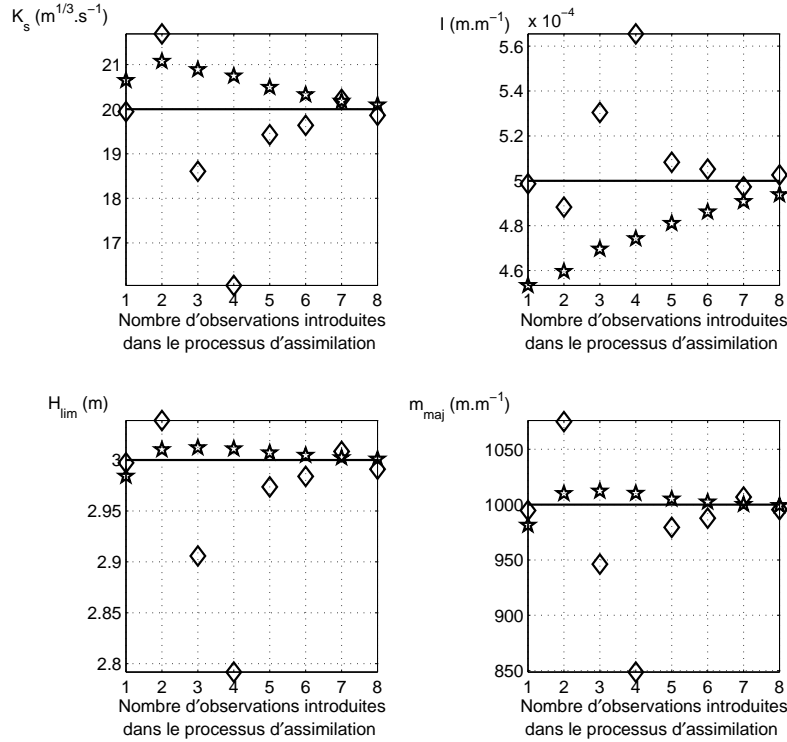


FIG. 4.11 – Comparaison des valeurs estimées avec ☆ le filtre de Kalman étendu et ◇ par minimisation de Φ_1 lorsque les observations sont introduites une par une, par ordre de débit croissant, dans le processus d'assimilation, $\sigma = 0.030$, cas test n°2, jeu de valeurs initiales n°1, — Valeur vraie

Si toutes les observations ne sont pas disponibles au même instant, il pourrait être nécessaire d'introduire les observations une par une dans le processus d'assimilation. En partant du jeu de valeurs initiales n°1 ou n°2, la fonction coût (Φ_1 , Φ_2 ou Φ_3) prenant en compte la première observation est minimisée. Le résultat de cette première minimisation est ensuite utilisée comme valeur initiale pour l'assimilation de la deuxième observation et ainsi de suite. Dans ce cas de figure, le comportement du filtre de Kalman étendu semble être plus satisfaisant que celui des trois fonctions coûts. En effet, comme le montre la figure (4.11), dans le cas de la minimisation d'une fonction coût, Φ_1 en l'occurrence, l'introduction d'une nouvelle observation n'améliore pas nécessairement l'estimation obtenue, alors que le filtre de Kalman étendu semble se comporter de manière plus cohérente. Dans une optique d'assimilation itérative, le filtre de Kalman étendu pourrait donc être se révéler plus opportun que la minimisation d'un critère d'erreur.

Afin d'aller plus loin dans l'étude des mérites respectifs des différentes méthodes, il peut être

intéressant d'introduire le concept d'intervalle de confiance pour de petits échantillons (moins de 50 tirages).

4.2.5 Intervalle de confiance

4.2.5.1 Définition et méthode de calcul

L'intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour μ (moyenne théorique) est un intervalle de type $[t_1, t_2]$ où $t_1 = t_1(X_1, \dots, X_f)$ et $t_2 = t_2(X_1, \dots, X_f)$ sont deux statistiques telles que la probabilité $P[t_1 \leq \mu \leq t_2]$ pour que μ soit comprise entre t_1 et t_2 est égale à $1 - \alpha$:

$$P[t_1 \leq \mu \leq t_2] = 1 - \alpha \quad (4.18)$$

Soient X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où μ , la moyenne, et σ^2 , la variance, sont inconnues et (X_1, \dots, X_f) un échantillon de f valeurs indépendantes. La variable aléatoire

$$\bar{X} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^f X_i \quad (4.19)$$

s'appelle la moyenne échantillonnale et la variable aléatoire

$$S^2 = \frac{1}{f-1} \sum_{i=1}^f (X_i - \bar{X})^2 \quad (4.20)$$

la variance échantillonnale (Bélisle, 2002).

Théorème 1 Si \bar{X} et S^2 dénotent respectivement la moyenne échantillonnale et la variance échantillonnale calculées à partir d'un échantillon aléatoire de taille f issu de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

1. $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{f}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ ¹,
2. $\frac{(f-1)S^2}{\sigma^2}$ suit la loi du χ^2 à $f-1$ degrés de liberté,
3. les variables aléatoires \bar{X} et S^2 sont indépendantes.

Théorème 2 Si Z et U sont des variables aléatoires indépendantes et si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $U \sim \chi^2(k)$, alors $\frac{Z}{\sqrt{U/k}}$ suit la loi t de Student à k degrés de liberté, ce qui se note :

$$\frac{Z}{\sqrt{U/k}} \sim t(k) \quad (4.21)$$

D'après le théorème 1, en prenant $k = f - 1$, le théorème 2 peut s'appliquer pour

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{f}} \quad \text{et} \quad U = \frac{(f-1)S^2}{\sigma^2}$$

après simplification

$$\frac{Z}{\sqrt{U/k}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{f}}$$

d'où :

¹ $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{f}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ se note $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{f}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Théorème 3 Si \bar{X} et S^2 dénotent respectivement la moyenne échantillonnale et la variance échantillonnale calculées à partir d'un échantillon aléatoire de taille f issu de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{f}} \sim t(f-1) \quad (4.22)$$

En utilisant les valeurs tabulées de la loi de Student, α étant fixé, il est possible de trouver t_α tel que $P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{f}}\right| \leq t_\alpha\right) = 1 - \alpha$, ce qui équivaut à :

$$P\left(\bar{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{f-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{f-1}}\right) = 1 - \alpha \quad (4.23)$$

L'intervalle

$$\left[\bar{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{f-1}}; \bar{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{f-1}}\right] \quad (4.24)$$

appelé *intervalle de confiance de la moyenne*, contient μ avec la probabilité $1 - \alpha$, t_α étant la valeur de la loi t de Student, au niveau α , à $f - 1$ degrés de liberté.

- Il devient alors possible de comparer les résultats obtenus en terme de (Khatibi et al., 1998) :
- largeur de l'intervalle de confiance : plus l'intervalle est étroit, meilleure est la qualité de l'estimation, à condition bien sûr que l'intervalle de confiance contienne la valeur vraie du paramètre,
 - sensibilité de la moyenne des estimations au niveau de bruit,
 - distance de la moyenne des estimations à la valeur vraie des paramètres.

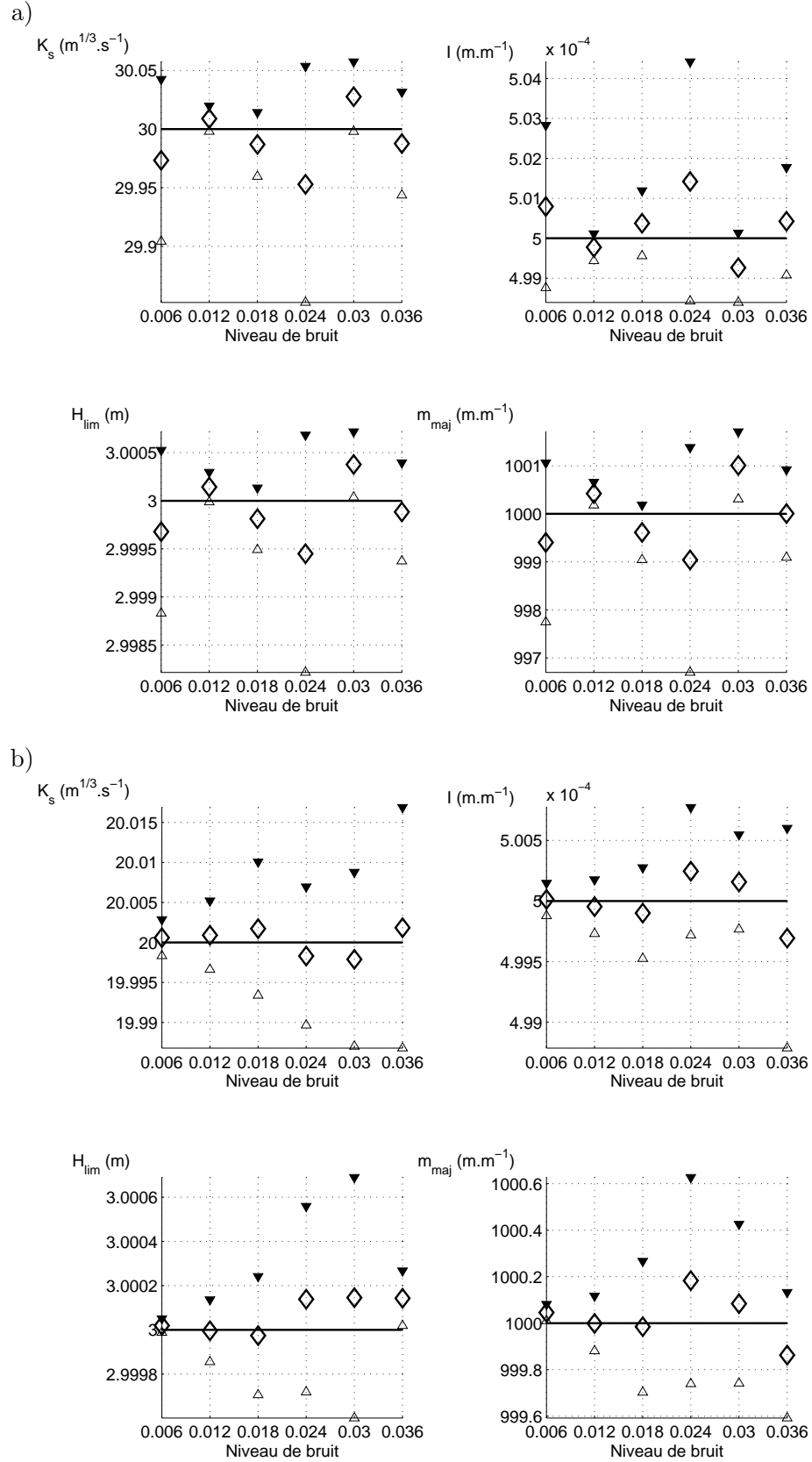
4.2.5.2 Présentation des résultats

La loi t de Student est basée sur l'hypothèse d'une distribution normale de la moyenne de l'échantillon. Dans le cas des expériences jumelles, les mesures étant générées par application d'un bruit gaussien, cette hypothèse est bien vérifiée.

$\alpha = 0.05$ a été choisi. La probabilité pour que la valeur vraie du paramètre se trouve à l'intérieur de l'intervalle de confiance calculé est donc de $P = 1 - \alpha$ soit $P = 0.95$. Pour un échantillon de taille $f = 5$, à savoir 4 degrés de liberté, la table des valeurs du t de Student fournit $t_\alpha = 2.132$, ce qui permet de calculer les bornes de l'intervalle de confiance. L'annexe B, § (B.4), expose les intervalles de confiance obtenus pour Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 et le filtre de Kalman étendu dans l'ensemble des cas testés.

Cas test n°1 L'intervalle de confiance ne contient pas toujours la valeur vraie du paramètre (Fig. 4.12 a), pour Φ_1). De plus aucune évolution en fonction du niveau de bruit ne se dégage de cette étude. Tantôt la largeur de l'intervalle de confiance augmente avec le niveau de bruit, en prenant toujours l'exemple de la minimisation de Φ_1 , pour K_s , la largeur de l'intervalle de confiance passe de $0.05 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ pour $\sigma = 0.018$, à $0.20 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ pour $\sigma = 0.024$; tantôt elle diminue : toujours pour K_s , elle n'est plus que de $0.06 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ pour $\sigma = 0.030$ (cas test n°1, jeu initial n°1).

Cas test n°2 Dans le cas test n°2, avec le jeu de valeur initiales n°1, les intervalles de confiance et valeurs moyennes estimés par minimisation de Φ_1 sont représentés sur la figure (4.12 b) en fonction du niveau de bruit. Quel que soit le paramètre considéré et quel que soit le niveau de bruit, l'intervalle de confiance contient bien la valeur vraie, sauf pour H_{lim} lorsque $\sigma = 0.036$. De plus, la largeur de ces intervalles est très faible, plus faible que pour le cas n°1,



elle est inférieure à $3 \times 10^{-2} m^{1/3}.s^{-1}$ pour K_s et elle ne dépasse pas $1.1 \times 10^{-3} m$ pour H_{lim} , ce qui indique que l'estimation peut être considérée comme très précise.

La largeur de l'intervalle de confiance semble augmenter avec le niveau de bruit : en ce qui concerne K_s , elle passe de $4.5 \times 10^{-3} m^{1/3}.s^{-1}$ pour $\sigma = 0.006$, à $3 \times 10^{-2} m^{1/3}.s^{-1}$ pour $\sigma = 0.036$. Il y a pourtant des exceptions : la largeur de l'intervalle de confiance sur m_{maj} diminue entre $\sigma = 0.024$ ($0.89 m$) et $\sigma = 0.030$ ($0.68 m$), et surtout celui sur H_{lim} qui passe de $1.1 \times 10^{-3} m$ pour $\sigma = 0.030$, à $2.5 \times 10^{-4} m$ pour $\sigma = 0.036$. Dans ce dernier cas cependant, l'intervalle de confiance ne contient pas la valeur vraie (la borne inférieure de l'intervalle de confiance est à $3.00002 m$!!), ce qui indique que cette estimation n'est plus fiable. Étant donné la précision de l'information, cette remarque semble quelque peu anecdotique : la profondeur du lit mineur est tout de même identifiée à $\approx 2 \times 10^{-4} m$ près.

L'ensemble de ces constatations sur le cas test n°2, y compris la particularité de l'intervalle de confiance sur H_{lim} lorsque $\sigma = 0.036$, est valable pour Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , quel que soit le jeu de valeurs initiales utilisé.

En ce qui concerne le filtre de Kalman étendu, les intervalles de confiance sur les différents paramètres contiennent bien la valeur vraie, en revanche ils sont en général plus larges que ceux obtenus par minimisation d'une fonction coût : de $0.1 m^{1/3}.s^{-1}$ à $4.7 m^{1/3}.s^{-1}$ pour K_s par exemple (cas test n°2, jeu initial n°1). Seul l'intervalle de confiance sur H_{lim} reste relativement étroit, de largeur inférieure à $3 \times 10^{-2} m$. Cette remarque tend à renforcer les observations précédentes sur les performances du filtre de Kalman étendu, moins satisfaisantes que celles des fonctions coûts dans le cadre de cette étude.

Quelle que soit la méthode employée, la moyenne des valeurs estimées est très proche de la valeur vraie, tantôt légèrement en-dessus, tantôt légèrement en-dessous, en fonction du niveau de bruit. Il ne semble pas possible de dégager une tendance particulière.

4.2.6 Analyse de sensibilité

Afin de tester la sensibilité du modèle aux quatre paramètres recherchés, une analyse basée sur la procédure décrite au paragraphe (2.3) a été mise en oeuvre. Un intervalle de variation, physiquement cohérent, a été fixé pour chacun des paramètres. En l'absence d'information supplémentaire, une distribution uniforme des paramètres à l'intérieur de leur intervalle de variation a été choisie. 10000 jeux de 4 paramètres ont ensuite été tirés de façon aléatoire à partir de ces distributions. La résolution du modèle hydrodynamique permet de calculer les largeurs au miroir correspondant à ces 10000 jeux et de les comparer aux observations au moyen de fonctions de vraisemblance. Trois expressions de fonctions de vraisemblance ont été choisies parmi celles couramment rencontrées dans la littérature :

- l'inverse de la somme des carrés des erreurs (Nash & Sutcliffe, 1970) :

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{\sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right)^2} \quad (4.25)$$

\mathbf{B}^o représente le vecteur des largeurs au miroir observées le long du cours d'eau, \mathbf{B}^s celui des largeurs au miroir simulées, j est l'indice spatial,

- l'efficience du modèle :

$$\mathcal{L}_e = 1 - \frac{\sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right)^2}{\sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \overline{\mathbf{B}^o} \right)^2}, \quad \sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right)^2 < \sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \overline{\mathbf{B}^o} \right)^2 \quad (4.26)$$

$\overline{\mathbf{B}^o}$ est la moyenne des largeurs au miroir observées le long du cours d'eau,

– la fonction de vraisemblance élaborée par [Freer et al. \(1996\)](#), avec $N = 1$:

$$\mathcal{L}_f = \exp \left(-N \frac{\sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right)^2}{\sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \overline{\mathbf{B}^o} \right)^2} \right) \quad (4.27)$$

Les intervalles de variation de chaque paramètre, dans chaque cas, sont listés dans le tableau (4.9). Ils ont été choisis de manière à ce que, lorsqu’un seul paramètre varie à l’intérieur de cet intervalle, les trois autres paramètres étant égaux à leur valeur réelle, la moyenne des écarts entre observations et simulations soit comprise entre 150 m et 350 m :

$$150 \, m \leq |\overline{\mathbf{B}^o} - \mathbf{B}^s| \leq 350 \, m \quad (4.28)$$

	Cas test n°1		Cas test n°2	
	Bornes		Bornes	
Paramètre	Inférieure	Supérieure	Inférieure	Supérieure
$K_s \, (m^{1/3}.s^{-1})$	25	35	15	25
$I \, (m.m^{-1})$	3.5×10^{-4}	6.5×10^{-4}	2.5×10^{-4}	7.5×10^{-4}
$H_{lim} \, (m)$	2.7	3.3	2.6	3.4
$m_{maj} \, (m.m^{-1})$	300	1700	700	1300

TAB. 4.9 – Bornes des intervalles de variation utilisés pour les simulations Monte-Carlo

Les figures et les valeurs, exposées par la suite dans ce paragraphe (4.2.6), concernent les résultats obtenus à partir des observations suivantes :

- cas n°1 : $Q = 390 \, m^3.s^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage,
- cas n°2 : $Q = 200 \, m^3.s^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage.

Elles sont données à titre d’exemple, afin d’illustrer les remarques qui se rapportent à l’ensemble des observations testées. Par ailleurs, pour des raisons de lisibilité, les figures exposées dans ce paragraphe (4.2.6) concernent toutes la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e . Les figures se rapportant aux fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s et \mathcal{L}_f sont rassemblées à l’annexe B, § (B.5.1) et (B.5.2).

Pour chacune des trois fonctions de vraisemblance, seules les 1000 meilleures simulations, c’est-à-dire les 1000 simulations ayant les plus fortes valeurs de vraisemblance, ont été retenues comme ayant un “comportement correct” (*behavioural*, selon la terminologie de [Hornberger & Spear \(1981\)](#)), la figure (4.13) représente les valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e correspondantes, pour les deux cas tests et pour l’ensemble des simulations *behavioural* uniquement. Ce choix a permis de déterminer, pour chaque fonction de vraisemblance, le seuil partageant l’ensemble des simulations en deux catégories *behavioural* et *non-behavioural*. Le tableau (4.10) donne les valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov d_{m_c, n_c} correspondant à la taille de ces échantillons, c’est-à-dire $n_c = 1000$, nombre de simulations ayant un “comportement correct” et $m_c = 9000$, nombre de simulations ayant un “comportement incorrect” (cf. Tab. 2.1). Le tableau (4.11) présente les valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo dans chaque cas et pour chaque fonction de vraisemblance. Ces valeurs ont été calculées à partir des densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres exposées à la figure (4.14).

En ce qui concerne le cas test n°1, le modèle semble sensible à la pente transversale du lit majeur m_{maj} , ainsi qu’à la profondeur du lit mineur H_{lim} , comme le confirme la figure (4.13 a) : les plus fortes valeurs de vraisemblance se situent toutes pour des valeurs inférieures à la valeur réelle, en ce qui concerne H_{lim} , et pour des valeurs supérieures à la valeur réelle, en ce qui

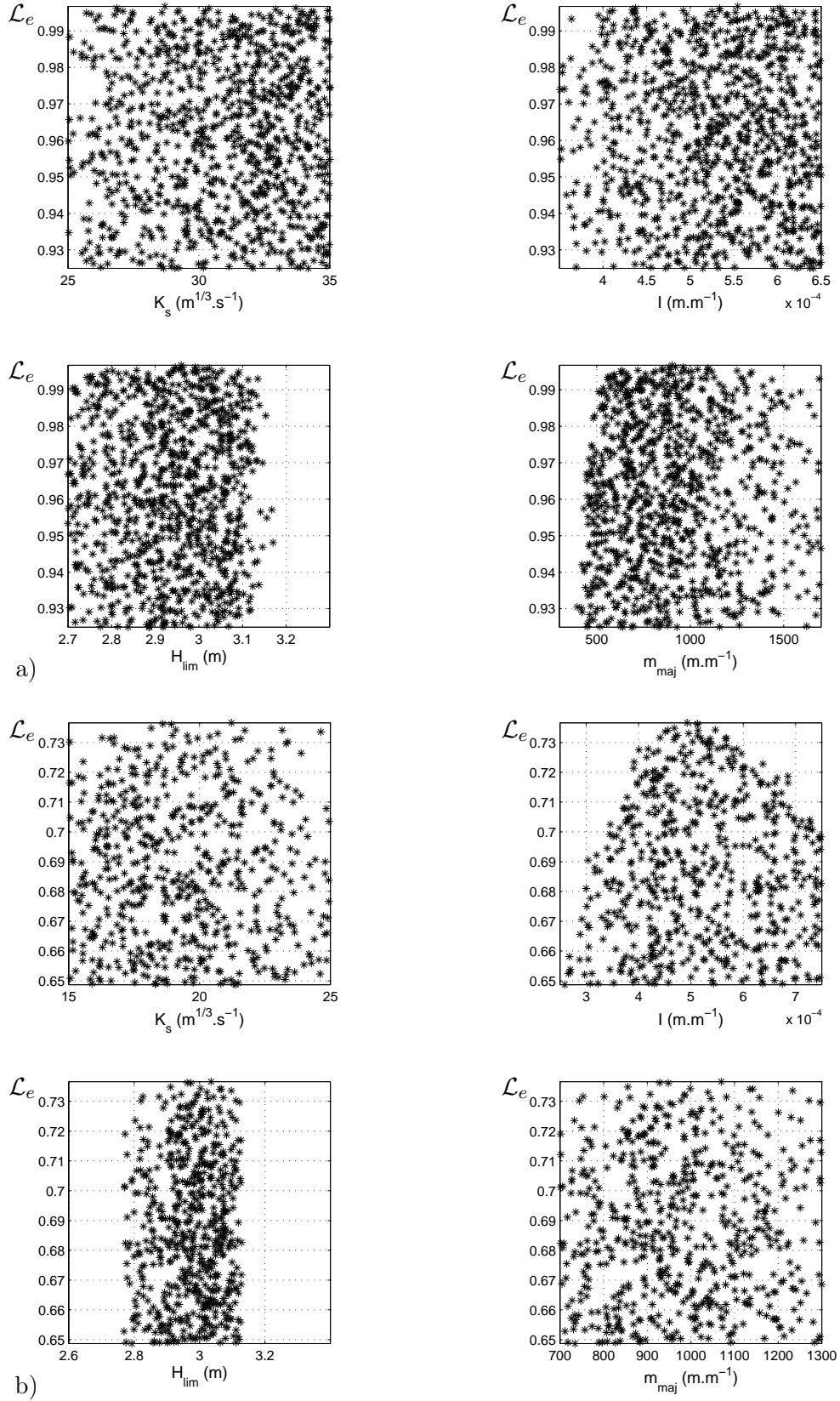


FIG. 4.13 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations *behavioural*, $\sigma = 0.036$, premier tirage, a) cas test n°1, $Q = 390 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, b) cas test n°2, $Q = 200 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$

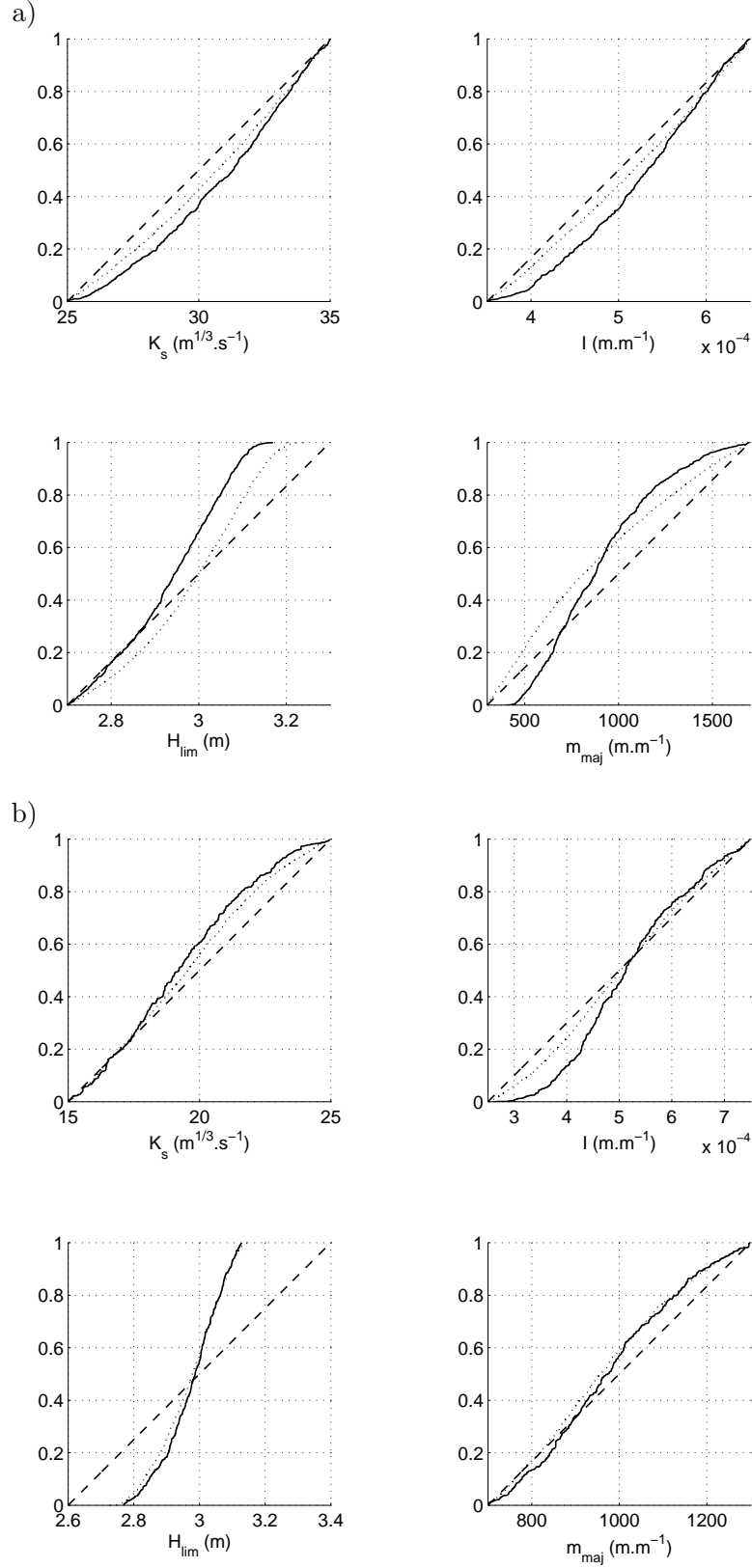


FIG. 4.14 – Densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres, calculées à partir de la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e , $\sigma = 0.036$, premier tirage : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*, a) cas test n°1, $Q = 390 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, b) cas test n°2, $Q = 200 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$

Niveau de signification	Risque de première espèce	Valeur critique de d_{m_c, n_c}
90.0 %	0.100	0.041
95.0 %	0.050	0.045
97.5 %	0.025	0.049
99.0 %	0.010	0.054
99.5 %	0.005	0.058
99.9 %	0.001	0.065

TAB. 4.10 – Valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, compte-tenu de la taille des échantillons

Paramètre	Cas test n°1 : d_{m_c, n_c}			Cas test n°2 : d_{m_c, n_c}		
	\mathcal{L}_s	\mathcal{L}_e	\mathcal{L}_f	\mathcal{L}_s	\mathcal{L}_e	\mathcal{L}_f
K_s	0.0613	0.0745	0.0723	0.0649	0.0636	0.0639
I	0.0911	0.0960	0.0946	0.1244	0.1210	0.1214
H_{lim}	0.1119	0.1762	0.1552	0.0773	0.0741	0.0744
m_{maj}	0.2078	0.1849	0.1849	0.0602	0.0569	0.0573

 TAB. 4.11 – Valeurs de la statistique de Kolmogorov d_{m_c, n_c} obtenues à partir des simulations Monte-Carlo dans chaque cas, pour les trois fonctions de vraisemblance, $\sigma = 0.036$, premier tirage (cas n°1 : $Q = 390 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, cas n°2 : $Q = 200 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)

concerne m_{maj} . Cette constatation signifie que le modèle étudié est particulièrement sensible à une surestimation de H_{lim} , et peu sensible à une sous-estimation de ce même paramètre. Au contraire, pour m_{maj} , le modèle serait sensible à une sous-estimation, et moins sensible à une surestimation. Toujours pour le cas n°1, la statistique d_{m_c, n_c} pour le coefficient de Strickler K_s se situe en dessous de la valeur critique correspondant à un niveau de signification de 99 % pour \mathcal{L}_s . Ces résultats tendraient à montrer que, pour le cas n°1, les paramètres m_{maj} et H_{lim} sont importants dans la simulation du comportement du système physique, alors que K_s l'est moins, au premier ordre en tous cas. En effet, l'importance d'éventuelles corrélations avec les autres paramètres n'est pas accessible par une analyse au premier ordre, il serait nécessaire d'examiner les matrices de covariance entre les différents paramètres pour aller plus loin dans l'exploitation de ces résultats.

Pour le cas test n°2, les paramètres déterminants se dégageant de cette analyse sont la pente du fond du lit I et la profondeur du lit mineur H_{lim} (cf. Fig. 4.13 b). Les valeurs de la statistique d_{m_c, n_c} pour le coefficient de Strickler K_s et la pente transversale du lit majeur m_{maj} se situent toujours au dessous de la valeur critique correspondant à un niveau de signification de 99 %.

Cette analyse permet d'aboutir aux remarques suivantes :

- Le comportement du modèle hydrodynamique est sensible au paramètre H_{lim} , c'est-à-dire la profondeur du lit mineur, dans les deux cas tests. Il est donc légitime de supposer que ce paramètre est identifiable, selon la terminologie introduite au paragraphe (2.1).
- Comparativement, l'influence du coefficient de Strickler K_s , notamment dans le cas test n°1, apparaît nettement moindre, au premier ordre. Il faudrait donc en conclure que ce paramètre sera plus difficile à reconstituer étant donné que le modèle y est moins sensible.

Cependant, dans le problème considéré, les paramètres à estimer étaient au nombre de 4 seulement, alors que 8 jeux de 1001 valeurs observées étaient à disposition. Les méthodologies mises en oeuvre ont donc permis d'identifier tous les paramètres de façon satisfaisante.

4.2.7 Conclusions

Dans le cadre de l'estimation de quatre paramètres, le coefficient de Strickler K_s , la pente du lit I , la profondeur du lit mineur H_{lim} et la pente transversale du lit majeur m_{maj} , c'est donc la minimisation de la fonction coût Φ_1 qui donne les meilleurs résultats. La fonction coût Φ_3 fournit également des résultats satisfaisants, mais moins bons que ceux de Φ_1 (cf. Tab. 4.8). En effet, l'erreur relative moyenne sur la largeur au miroir simulée δ_B^a est toujours inférieure à 0.01 % pour Φ_1 , elle atteint 0.11 % pour Φ_3 dans le cas n°1, avec le jeu de valeurs initiales n°2, pour $\sigma = 0.024$. Quant à Φ_2 , il a été prouvé que l'estimation fournie dépendait fortement de la valeur initiale choisie. Dans le cas test n°1, Φ_2 ne fournit un résultat satisfaisant qu'avec le jeu initial n°2, pourtant plus éloigné des valeurs vraies que le jeu initial n°1. Étant donné que le problème est fortement non linéaire, les trois fonctions coûts présentent une surface complexe, il est donc probable qu'avec une méthode de minimisation locale, la valeur initiale des paramètres choisie ait une influence sur le résultat obtenu, et ce pour les trois fonctions coûts. Néanmoins, dans le cadre de cette étude, un tel comportement n'a été observé que pour Φ_2 . Quant au filtre de Kalman étendu, si les résultats obtenus restent raisonnables ($\delta_B^a < 4$ % et $\delta_H^a < 5$ %, pour $\sigma = 0.024$), plusieurs écueils ont été rencontrés lors de sa mise en oeuvre. Tout d'abord, cette méthode ne converge pas toujours. En particulier, dans le cas test n°2, avec le jeu initial n°2, il n'a pas été possible d'obtenir de résultats avec le filtre de Kalman étendu. De plus, l'estimation finale des paramètres dépend fortement de l'ordre d'introduction des observations dans le processus d'assimilation. Le résultat obtenu ne sera pas le même selon que les observations ont été prises en compte par ordre de débit croissant ou décroissant (cf. Fig. 4.10). Ces deux constatations ne plaident pas en faveur de la méthode. Toutefois, lorsque les observations sont introduites une par une dans le processus d'assimilation, il a été montré que chaque nouvelle itération n'améliore pas nécessairement l'estimation fournie par minimisation d'une fonction coût (cf. Fig. 4.11) alors que l'évolution des estimations procurées par le filtre de Kalman étendu semble plus favorable. Cette propriété peut se révéler particulièrement utile pour une utilisation en temps réel, où les observations ne seront pas toutes disponibles au même instant.

Une autre remarque, d'ordre plus général, peut être faite en se basant sur les résultats des deux cas tests. Les estimations obtenues en utilisant les observations du cas test n°2 (écoulement débordant en lit majeur tout le long du tronçon étudié) sont généralement meilleures que celles obtenues par assimilation des observations du cas test n°1 (écoulement débordant en lit majeur sur une partie seulement du tronçon étudié). C'est une conséquence du fait que, pour l'objectif de cette analyse, il y a comparativement moins d'informations dans les observations du cas test n°1 que dans les observations du cas test n°2, comme expliqué au paragraphe (4.2.2). Néanmoins, la minimisation de Φ_1 procure des estimations qui permettent de simuler la largeur au miroir le long du cours d'eau avec une erreur relative moyenne δ_B^a toujours inférieure à 0.01 %, dans les deux cas tests et avec les deux jeux de valeurs initiales utilisés. Il est donc possible d'identifier les paramètres recherchés même lorsque les informations initiales font défaut, puisque la minimisation de Φ_1 , ou même celle de Φ_3 , permet d'obtenir des estimations correctes dans les deux cas tests avec un jeu de valeurs initiales relativement éloignées des valeurs vraies des paramètres. Cette capacité peut se révéler profitable pour acquérir des informations sur la géométrie des cours d'eau dans le cas de rivières non jaugées.

4.3 Reconstitution de six paramètres

Le cours d'eau simplifié étudié est le même que pour la reconstitution de quatre paramètres (Fig. 4.2), la géométrie est toujours uniforme. Les seuls changements concernent :

- la rugosité : elle est composite et vaut $K_{s,min}$ en lit mineur, $K_{s,maj}$ en lit majeur,
- la largeur du fond du lit, ou largeur au radier, B_0 est à présent inconnue.

Les paramètres à estimer sont les suivants :

- le coefficient de Strickler du lit mineur $K_{s,min} (m^{1/3}.s^{-1})$,
- le coefficient de Strickler du lit majeur $K_{s,maj} (m^{1/3}.s^{-1})$,
- la largeur du fond du lit $B_0 (m)$,
- la pente du fond du lit $I (m.m^{-1})$,
- la profondeur du lit mineur $H_{lim} (m)$,
- la pente transversale du lit majeur $m_{maj} (m.m^{-1})$.

Le vecteur de l'état du système \mathbf{x} est donc de dimension $(6, 1)$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} K_{s,min} \\ K_{s,maj} \\ B_0 \\ I \\ H_{lim} \\ m_{maj} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

La modélisation en lit composé choisie est celle faisant l'hypothèse de l'égalité des pentes d'énergie et des vitesses dans les différentes sous-sections transversales (§ 1.3.2.2). Le coefficient de Strickler composite, fonction de la hauteur d'eau H , est calculé à partir de la formule d'Einstein :

$$K_s(H) = \left(\frac{P_w}{\frac{P_{w,min}}{K_{s,min}^{3/2}} + \frac{P_{w,maj}}{K_{s,maj}^{3/2}}} \right)^{2/3} \quad (4.30)$$

P_w est le périmètre mouillé total (m), $P_{w,min}$ celui du lit mineur et $P_{w,maj}$ celui du lit majeur.

Comme au paragraphe (4.2), les observations consistent en un vecteur des largeurs de la zone inondée le long du tronçon considéré.

4.3.1 Description des cas testés

Les cas testés présentent les mêmes caractéristiques que précédemment :

- **Cas n°1** : l'écoulement ne déborde en lit majeur que sur une partie du tronçon considéré,
- **Cas n°2** : l'écoulement déborde en lit majeur tout le long du tronçon considéré.

Les valeurs des différents paramètres des cas tests n°1 et n°2 sont récapitulées dans le tableau (4.12).

Chaque jeu d'observations est donc un vecteur de largeurs au miroir bruitées \mathbf{B}^o de dimension $(1001, 1)$, généré à partir du vecteur de largeurs au miroir réelles \mathbf{B}^t :

$$\mathbf{B}^o = \mathbf{B}^t + \gamma \times \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma) \quad (4.31)$$

Les six niveaux de bruit testés, ainsi que les variations induites sur les largeurs au miroir, sont semblables à ceux du paragraphe (4.2) (Tab. 4.13), de même cinq échantillons ont été générés pour chaque débit et pour chaque niveau de bruit.

4.3.2 Résultats obtenus

Les procédures mises en oeuvre pour estimer les six paramètres recherchés sont identiques au cas de l'estimation de quatre paramètres, aussi bien pour la minimisation des fonctions coûts :

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k \right)^2 \quad (4.32)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\frac{\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k}{\mathbf{B}^o|_j^k} \right)^2 \quad (4.33)$$

			Cas n°1	Cas n°2
Paramètres connus	Débits (Chaque valeur correspond à un jeu d'observations)		$335 \text{ m}^3.s^{-1}$	$200 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$340 \text{ m}^3.s^{-1}$	$280 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$345 \text{ m}^3.s^{-1}$	$300 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$350 \text{ m}^3.s^{-1}$	$320 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$355 \text{ m}^3.s^{-1}$	$370 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$360 \text{ m}^3.s^{-1}$	$400 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$365 \text{ m}^3.s^{-1}$	$460 \text{ m}^3.s^{-1}$
			$370 \text{ m}^3.s^{-1}$	$500 \text{ m}^3.s^{-1}$
	Longueur du tronçon	L	10^4 m	
	Pas d'espace	Δx	10 m	
	Hauteur du seuil aval	P	2.2 m	2.4 m
Paramètres à estimer	Coefficient de Strickler du lit mineur	$K_{s,min}$	$30 \text{ m}^{1/3}.s^{-1}$	
	Coefficient de Strickler du lit majeur	$K_{s,maj}$	$15 \text{ m}^{1/3}.s^{-1}$	$10 \text{ m}^{1/3}.s^{-1}$
	Largeur du fond du lit	B_0	200 m	100 m
	Pente du fond	I	$5 \times 10^{-4} \text{ m.m}^{-1}$	
	Profondeur du lit mineur	H_{lim}	3 m	
	Pente transversale du lit majeur	m_{maj}	500 m.m^{-1}	1000 m.m^{-1}

TAB. 4.12 – Paramètres des deux cas tests

	Niveau de bruit σ	Erreur induite sur \mathbf{B}	Écart-type	Erreur RMS
Cas n°1	0.006	0.96 m	1.2 m	0.4%
	0.012	1.92 m	2.4 m	0.9%
	0.018	2.88 m	3.6 m	1.3%
	0.024	3.84 m	4.8 m	1.8%
	0.030	4.81 m	6.0 m	2.2%
	0.036	5.74 m	7.2 m	2.7%
Cas n°2	0.006	0.96 m	1.2 m	0.04%
	0.012	1.92 m	2.4 m	0.08%
	0.018	2.86 m	3.6 m	0.12%
	0.024	3.82 m	4.8 m	0.16%
	0.030	4.79 m	6.0 m	0.20%
	0.036	5.70 m	7.1 m	0.24%

 TAB. 4.13 – Niveaux de bruit et variations moyennes de \mathbf{B} correspondantes, $\gamma = 200 \text{ m}$

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^8 \sum_{j=1}^{1001} \left(\frac{\mathbf{B}^o|_j^k - \mathbf{B}^s|_j^k}{\mathbf{B}^s|_j^k} \right)^2 \quad (4.34)$$

que pour le filtre de Kalman étendu. Ici également, afin d'étudier l'influence du point de départ sur la valeur optimale obtenue, deux jeux différents d'initialisation de la minimisation ont été utilisés (Tab. 4.14) :

- **Jeu n°1** : valeurs initiales proches des valeurs “vraies”,
- **Jeu n°2** : valeurs initiales éloignées des valeurs “vraies”.

		Jeu n°1		Jeu n°2	
		Cas n°1	Cas n°2	Cas n°1	Cas n°2
Coefficient de Strickler du lit mineur	$K_{s,min}$	$25 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$		$40 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$	
Coefficient de Strickler du lit majeur	$K_{s,maj}$	$10 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$	$15 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$	$30 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$	$20 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$
Largeur du fond du lit	B_0	160 m	80 m	100 m	50 m
Pente du fond du lit	I	$10^{-4} \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$		$10^{-3} \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	
Profondeur du lit mineur	H_{lim}	2.5 m		1.5 m	
Pente transversale du lit majeur	m_{maj}	$495 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	$990 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	$350 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	$700 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$

TAB. 4.14 – Jeux de valeurs initiales des paramètres à estimer

Dans un premier temps, la méthode de minimisation d'une fonctionnelle, minimisation non linéaire et sans contrainte, employée pour la reconstitution de quatre paramètres, a été mise en oeuvre. Cependant, avec le jeu de valeurs initiales n°2 notamment, les valeurs optimales obtenues pour les coefficients de Strickler $K_{s,min}$ et/ou $K_{s,maj}$ n'étaient pas toujours physiquement cohérentes. La figure (4.15) montre un exemple de résultat obtenu dans le cas n°2, avec le jeu de valeurs initiales n°2, la valeur optimale de $K_{s,min}$ estimée par minimisation de Φ_1 est égale à $666 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$! Un moyen d'éviter ces résultats, qui ne sont pas physiques, consiste à introduire des bornes pour les paramètres concernés. Cela revient à chercher le minimum de la fonction coût à l'intérieur d'une région donnée de l'espace des paramètres, et non plus dans la totalité de cet espace. Cette région de l'espace des paramètres est définie par l'ensemble des intervalles de variation fixés pour chaque paramètre. Ici, les valeurs optimales des coefficients de Strickler $K_{s,min}$ et/ou $K_{s,maj}$ n'étaient pas satisfaisantes, des intervalles de variation ont donc été introduits dans le processus de minimisation, pour ces deux paramètres seulement (Tab. 4.15). Il s'agit de contraintes mathématiques, non physiques, puisque les intervalles de variation choisis couvrent pratiquement l'ensemble des valeurs possibles pour un coefficient de Strickler (cf. Tab. 1.1).

Cependant, même en introduisant un intervalle de variation physiquement cohérent, dans le cas test n°2, l'estimation du coefficient de Strickler du lit mineur $K_{s,min}$ reste moins satisfaisante que celle des autres paramètres, comme le montre bien la figure (4.16).

L'annexe C, § (C.1.1), (C.1.2), (C.2), (C.3) et (C.4) regroupe l'ensemble des résultats obtenus. La plupart des observations faites dans le cas de l'estimation de quatre paramètres se retrouve :

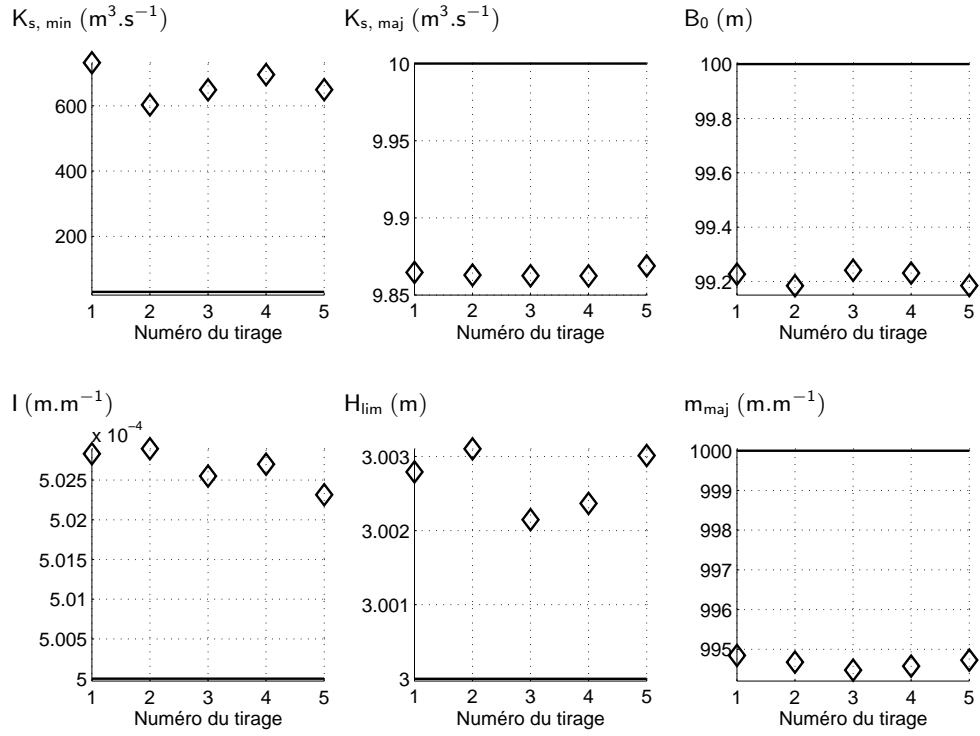


FIG. 4.15 – Valeurs des paramètres estimées par $\diamond \Phi_1$ pour les 5 tirages lorsque $\sigma = 0.006$, cas n°2, jeu de valeurs initiales n°2, — Valeur vraie

		Valeur minimale	Valeur maximale
Coefficient de Strickler du lit mineur	$K_{s, \min}$	$15 m^{1/3}.s^{-1}$	$45 m^{1/3}.s^{-1}$
Coefficient de Strickler du lit majeur	$K_{s, \text{maj}}$	$5 m^{1/3}.s^{-1}$	$35 m^{1/3}.s^{-1}$

TAB. 4.15 – Valeurs des contraintes introduites dans le processus de minimisation

- la valeur optimale du paramètre obtenue dépend de la valeur initiale choisie, quelle que soit la procédure d'assimilation employée. Il est cependant relativement aisé de fixer des intervalles de variation et des valeurs initiales cohérents avec la morphologie du cours d'eau étudié,
- les résultats obtenus sont meilleurs lorsque les données assimilées concernent des écoulements ayant débordé en lit majeur tout le long du tronçon considéré (cas test n°2). Dans le cas de l'estimation de six paramètres, l'assimilation de données du cas test n°1 ne donne pas de résultats satisfaisants,
- Le filtre de Kalman étendu ne converge pas toujours. Il fournit généralement des résultats moins satisfaisants que la minimisation d'une fonction coût, notamment dans le cas test n°2.

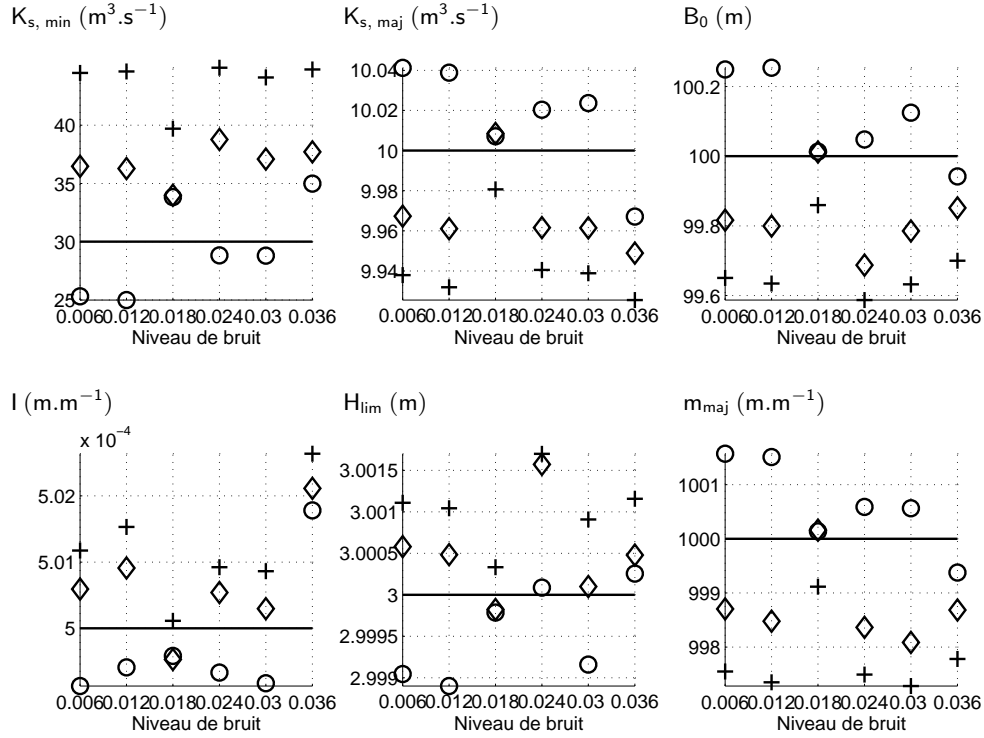


FIG. 4.16 – Valeurs des paramètres estimées par $\diamond \Phi_1$, $+$ Φ_2 et $\circ \Phi_3$, cas n°2, jeu de valeurs initiales n°2, minimisation avec bornes pour $K_{s, \min}$ et $K_{s, \text{maj}}$, — Valeur vraie

4.3.3 Analyse de sensibilité

Une procédure identique à celle décrite au paragraphe (4.2.6) a été mise en oeuvre afin de tester la sensibilité du modèle aux six paramètres recherchés. Ici encore, les figures et les valeurs exposées par la suite concernent les résultats obtenus à partir d'un tirage seulement dans chaque cas et sont données à titre d'exemple. Le tirage concerné est le suivant :

- cas n°1 : $Q = 335 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage,
- cas n°2 : $Q = 200 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage.

L'ensemble des figures présentant les résultats obtenus est regroupé à l'annexe C, § (C.5.1) et (C.5.2).

Le tirage aléatoire de 10000 jeux des 6 paramètres, uniformément distribués à l'intérieur de leurs intervalles de variation respectifs (Tab. 4.16) constitue la première étape de l'analyse de sensibilité. La figure (4.17) représente les valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues pour les 1000

simulations *behavioural* dans les cas tests n°1 et 2. Les densités de probabilité cumulatives des six paramètres (Fig. 4.18, pour la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e) sont calculées à partir de ces valeurs de vraisemblance, elles-mêmes permettant d'obtenir les valeurs de la statistique de Kolmogorov d_{m_c, n_c} exposées dans le tableau (4.17). Les valeurs critiques de d_{m_c, n_c} sont identiques au cas de quatre paramètres (cf. Tab. 4.10, $n_c = 1000$ simulations *behavioural* et $m_c = 9000$ simulations *non-behavioural*).

Paramètre	Cas test n°1		Cas test n°2	
	Bornes		Bornes	
	Inférieure	Supérieure	Inférieure	Supérieure
$K_{s, min} (m^{1/3}.s^{-1})$	18	42	5	55
$K_{s, maj} (m^{1/3}.s^{-1})$	11	19	8	12
$B_0 (m)$	184	450	50	150
$I (m.m^{-1})$	3.4×10^{-4}	6.6×10^{-4}	3.0×10^{-4}	8.0×10^{-4}
$H_{lim} (m)$	2.8	3.2	2	3.4
$m_{maj} (m.m^{-1})$	255	745	800	1200

TAB. 4.16 – Bornes des intervalles de variation utilisés pour les simulations Monte-Carlo, choisies telles que $150 m \leq |\mathbf{B}^o - \mathbf{B}^s| \leq 350 m$ (cf. § 4.2.6)

Paramètre	Cas test n°1 : d_{m_c, n_c}			Cas test n°2 : d_{m_c, n_c}		
	\mathcal{L}_s	\mathcal{L}_e	\mathcal{L}_f	\mathcal{L}_s	\mathcal{L}_e	\mathcal{L}_f
$K_{s, min}$	0.0604	0.0449	0.0458	0.0410	0.0246	0.0240
$K_{s, maj}$	0.0933	0.0873	0.0868	0.1100	0.0826	0.0824
B_0	0.3949	0.4243	0.4147	0.0367	0.0310	0.0300
I	0.0890	0.0829	0.0829	0.1574	0.1129	0.1139
H_{lim}	0.1347	0.1794	0.1666	0.1344	0.1385	0.1339
m_{maj}	0.0472	0.0490	0.0470	0.0554	0.0238	0.0245

TAB. 4.17 – Valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo dans chaque cas, $n_c = 1000$, $\sigma = 0.036$, premier tirage (cas n°1 : $Q = 335 m^3.s^{-1}$, cas n°2 : $Q = 200 m^3.s^{-1}$)

Lorsque l'écoulement ne déborde en lit majeur que sur une partie du tronçon considéré, le modèle hydrodynamique employé est particulièrement sensible à la largeur du fond du lit B_0 et à la profondeur du lit mineur H_{lim} . La sensibilité du modèle à H_{lim} avait déjà été mise en évidence au paragraphe (4.2.6), par contre B_0 n'intervenait pas puisque ce paramètre était connu. Lorsque l'écoulement a lieu en lit mineur seulement, la largeur au miroir B est égale à B_0 étant donné que le lit mineur est rectangulaire. Il est donc logique que, dans le cas n°1, ce paramètre soit déterminant pour le comportement du modèle. La figure (4.17 a), qui représente les valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues pour les simulations *behavioural* dans le cas n°1, montre bien que les valeurs de \mathcal{L}_e les plus élevées se situent toutes au voisinage de $H_{lim} = 3 m$ et $B_0 = 200 m$. En revanche, en ce qui concerne $K_{s, min}$, $K_{s, maj}$, I et m_{maj} , les valeurs de vraisemblance les plus élevées sont réparties dans tout l'intervalle de variation considéré.

Dans le cas test n°2, le même paramètre déterminant que dans le cas n°1, H_{lim} , se détache des valeurs de d_{m_c, n_c} pour les différentes fonctions de vraisemblance (Tab. 4.17). Les valeurs

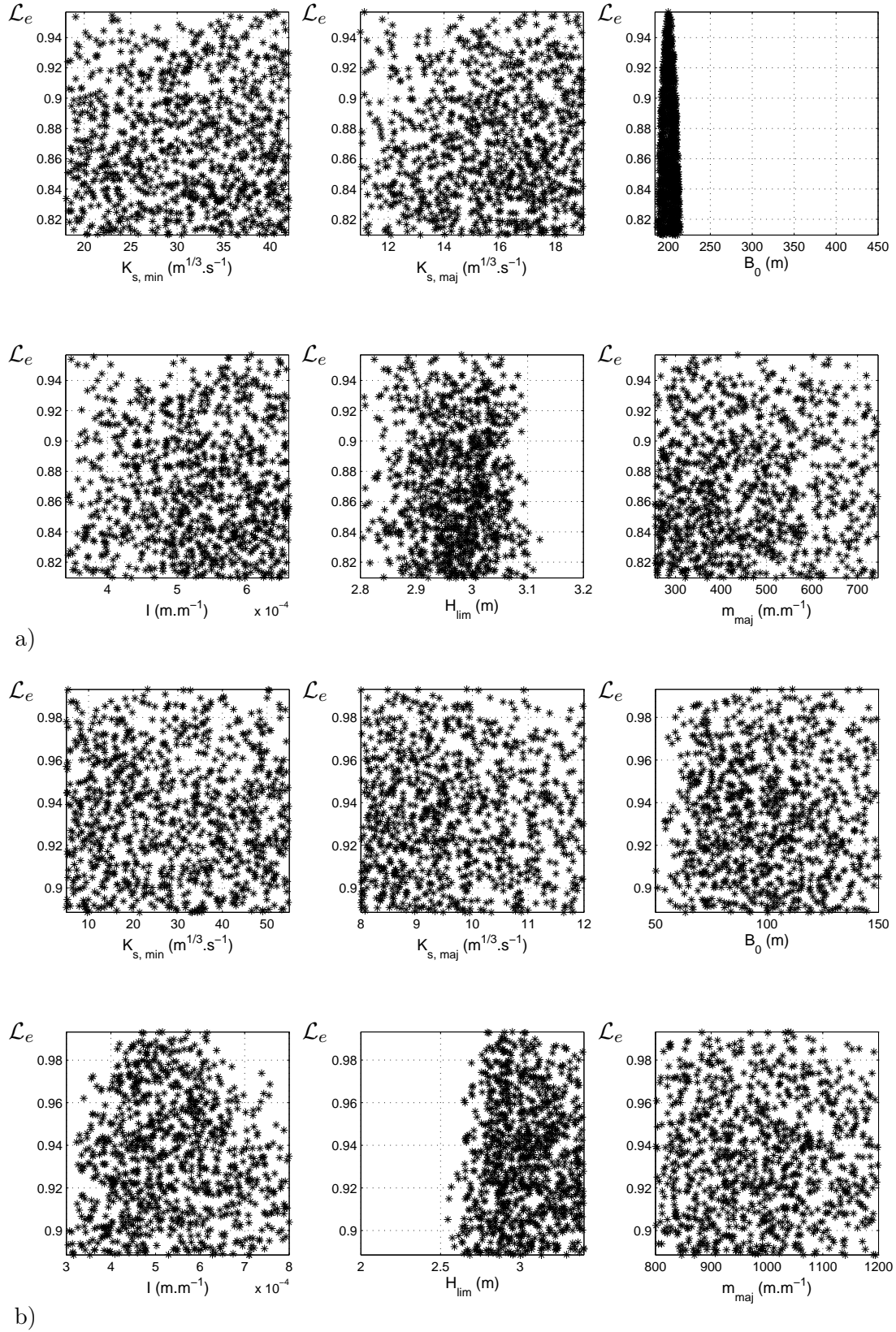


FIG. 4.17 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations *behavioural*, $\sigma = 0.036$, premier tirage, a) cas test n°1, $Q = 335 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, b) cas test n°2, $Q = 200 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

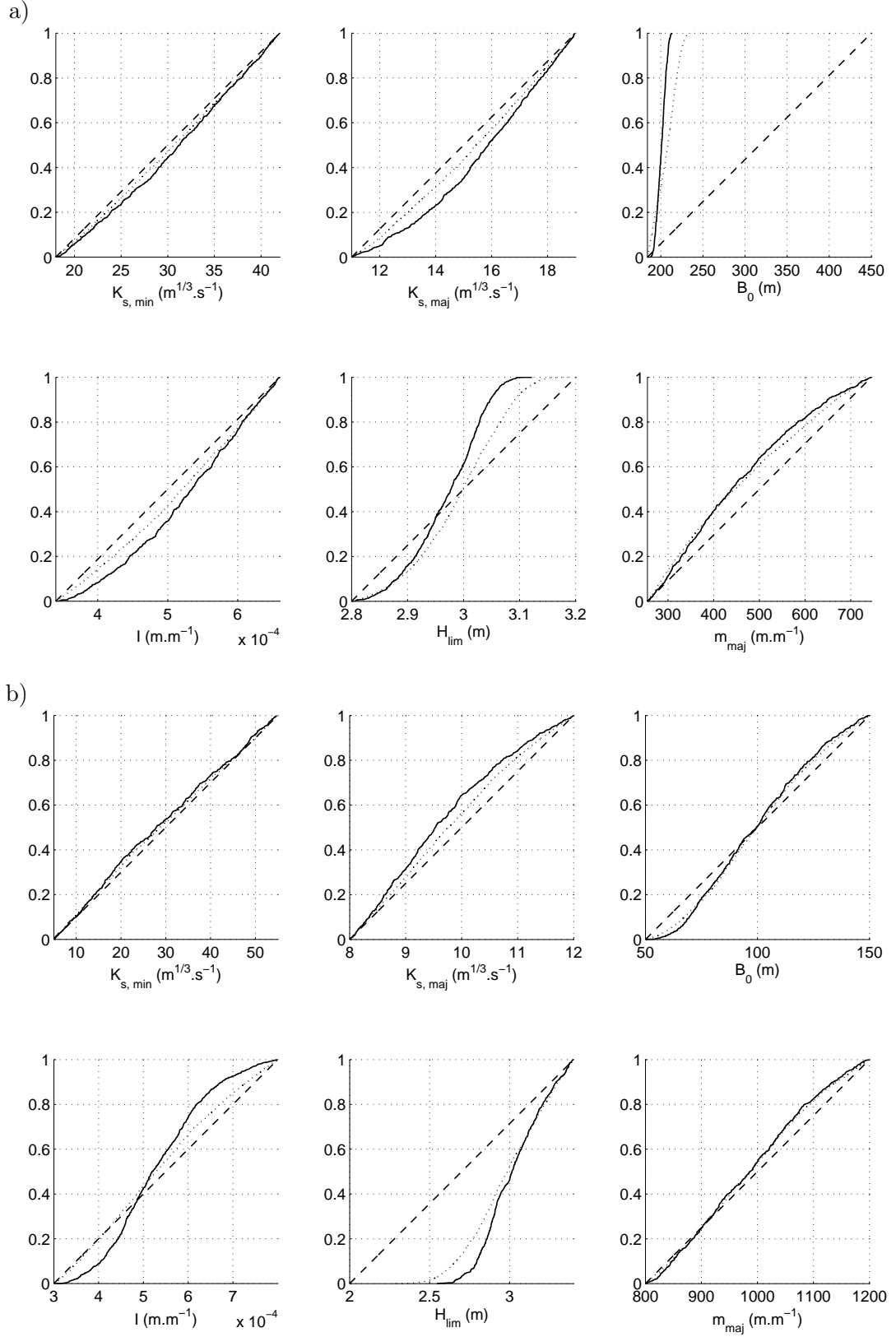


FIG. 4.18 – Densités de probabilité cumulatives des six paramètres, calculées à partir de la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e , $\sigma = 0.036$, premier tirage : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*, a) cas test n°1, $Q = 335 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, b) cas test n°2, $Q = 200 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$

de vraisemblance obtenues pour les simulations *behavioural* (Fig. 4.17 b), pour \mathcal{L}_e), mettent en évidence cette grande sensibilité du modèle à la profondeur du lit mineur H_{lim} . La sensibilité du modèle au paramètre I apparaît également comme non négligeable. Le paramètre $K_{s, maj}$ semble avoir une influence moindre sur le comportement du modèle, mais reste néanmoins à prendre en considération étant données les valeurs correspondantes de d_{m_c, n_c} (Tab. 4.17 et Fig. 4.18 b), qui se situent nettement au-dessus du niveau de signification de 90 %. Il ressort également de cette analyse que, dans le cas test n°2, le modèle hydrodynamique est peu sensible à $K_{s, min}$, B_0 et m_{maj} , au premier ordre : les valeurs de d_{m_c, n_c} sont au-dessous du niveau de signification de 90 % pour ces trois paramètres.

Finalement, les principales remarques découlant de cette analyse sont les suivantes :

- Comme dans le cas de l'estimation de quatre paramètres (§ 4.2.6), le comportement du modèle hydrodynamique est très sensible à la profondeur du lit mineur H_{lim} , dans les deux cas tests. Ce paramètre semble donc identifiable. Dans le cas test n°1, les résultats de l'analyse tendraient à montrer que B_0 l'est également.
- Le coefficient de Strickler du lit mineur $K_{s, min}$ semble avoir peu d'influence, au premier ordre, sur le comportement du modèle, notamment dans le cas test n°2. Il faut donc s'attendre à ce que ce paramètre soit plus difficile à reconstituer. Cette constatation est en accord avec les résultats exposés ci-dessus (§ 4.3.2). En effet, sans l'introduction de contraintes dans le processus de minimisation, il n'a pas été possible d'estimer $K_{s, min}$. De plus, même en introduisant des bornes permettant d'avoir des valeurs physiquement cohérentes à l'issue de la minimisation, l'estimation de $K_{s, min}$ reste cependant moins satisfaisante que celle des autres paramètres.

4.4 Conclusions

Ce chapitre considère le cas d'un écoulement monodimensionnel permanent. Les paramètres recherchés sont constants dans le temps et dans l'espace. Les observations utilisées sont des largeurs au miroir, elles ont été générées numériquement. Deux méthodes d'assimilation de données sont mises en oeuvre afin d'estimer les paramètres inconnus, suivies par une analyse de sensibilité, basée sur le principe de la Generalized Sensivity Analysis de [Hornberger & Spear \(1981\)](#).

Que les paramètres à estimer soient au nombre de 4 ou de 6, les résultats obtenus sont satisfaisants, aussi bien en terme de valeur moyenne, elle est très proche de la valeur réelle, qu'en terme d'intervalles de confiance, ils sont resserrés autour de la valeur réelle. Les paramètres auxquels le modèle est moins sensible sont plus difficilement identifiables (cf. $K_{s, min}$ pour la reconstitution de six paramètres), et peuvent nécessiter l'introduction de contraintes dans le processus d'assimilation, afin d'obtenir une estimation cohérente d'un point de vue physique. Néanmoins, une fois réduit l'espace des paramètres, l'estimation produite devient correcte.

Cette étape préliminaire, pour un écoulement permanent, s'est révélée concluante. Cependant, d'une part, le nombre de paramètres à estimer était très nettement inférieur au nombre d'observations à disposition, d'autre part, les autres paramètres du problème, ceux qui ne sont pas estimés, sont connus exactement, c'est-à-dire sans aucune incertitude. Il s'agit, bien entendu, d'un cas de figure bien éloigné des conditions réelles de modélisation d'une rivière.

Chapitre 5

Cas d'un écoulement monodimensionnel non permanent

Sommaire

5.1	Position du problème	106
5.2	Cas test	106
5.3	Reconstitution du débit amont	109
5.3.1	Géométrie parfaitement connue	109
5.3.1.1	Ligne d'eau et débit initiaux non bruités	110
5.3.1.2	Ligne d'eau et débit initiaux bruités	111
5.3.1.3	Conclusions	113
5.3.2	Géométrie bruitée	114
5.4	Reconstitution du débit initial et du débit amont	116
5.4.1	Géométrie parfaitement connue	116
5.4.2	Géométrie bruitée	119
5.5	Analyse de sensibilité	120
5.6	Conclusions	124

Ce chapitre regroupe les résultats obtenus lors de l'estimation d'un hydrogramme de crue pour un écoulement monodimensionnel non permanent, dans différents cas de figure. Comme au chapitre précédent (chapitre 4), ces résultats sont le fruit :

- de l'application des méthodes d'assimilation décrites au chapitre 3,
- d'une analyse de sensibilité du modèle aux paramètres recherchés, analyse destinée à tester l'identifiabilité de ces paramètres.

5.1 Position du problème

Dans la modélisation hydrologique, le calage du modèle est souvent effectué par comparaison des hydrogrammes simulés et observés. En ce qui concerne la validation du modèle, dans le domaine de la prévision des événements extrêmes (inondation ou sécheresse), la précision de la prévision est calculée à partir de la différence entre débit observé et débit simulé sur la période considérée. Ainsi, pour un ajustement parfait, le critère de Nash (Eq. 5.1) doit être égal à 1.

$$NASH = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_i^o - Q_i^s)^2}{\sum_{i=1}^n (Q_i^o - \bar{Q}^o)^2} \quad (5.1)$$

i est l'indice temporel, Q_i^o est le débit observé à l'instant i ($m^3.s^{-1}$), Q_i^s est le débit calculé à l'instant i ($m^3.s^{-1}$) et \bar{Q}^o est la moyenne des débits observés pendant la période simulée, c'est-à-dire entre $i = 1$ et $i = n$.

En pratique, tous les bassins versants ne disposent pas d'une station de mesure de débit.

Currently, less than 60 % of the runoff from the continents is monitored at the point of inflow to the oceans (Fekete et al., 1999). The distribution of runoff within the continent is even less monitored (Bjerklie et al., 2003).

De plus, lorsqu'il existe effectivement une station de jaugeage, les instruments de mesure sont parfois détériorés lors des crues violentes, et donc incapables de fournir l'hydrogramme de ladite crue. Encore une fois, le processus de modélisation se heurte au manque de données, d'où la multiplication des recherches entreprises pour essayer d'obtenir des renseignements sur le débit (Bjerklie et al., 2003; Dingman & Sharma, 1997; Savenije, 2003; Smith, 1997, ...). Toujours dans une optique de valorisation des informations fournies par la télédétection, la question qui est abordée dans ce chapitre est la suivante : est-il envisageable d'utiliser les surfaces inondées extraites des images en temps de crue afin de remonter à l'hydrogramme de cette crue ?

Hydrographic data obtained from satellites and other remote sources offer the possibility of broad and potentially frequent global coverage of river discharge estimates (Barrett, 1998). Thus, a method that uses remotely sensed data to estimate river discharge would provide a means to maintain or even increase the global streamflow monitoring network and may, in the long run, be a cost-effective method to obtain needed river discharge data on a global scale (Bjerklie et al., 2003).

5.2 Cas test

L'écoulement étudié est monodimensionnel, non permanent, sans débit d'apport ni de fuite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Le système d'équations (5.2) est résolu par la méthode de différences finies utilisant le schéma de discrétisation de Preissmann décrite au paragraphe (1.4.2.1). La méthode dite du double balayage, (§ 1.4.2.2 et annexe A) a ensuite été choisie pour résoudre le système résultant de la discrétisation des équations (5.2). Comme au chapitre précédent (chapitre 4), la loi de fonctionnement d'un déversoir à seuil épais en régime dénoyé a été choisie comme condition à la limite aval du tronçon étudié (cf. Fig. 4.1) :

$$H_{av} = \left(\frac{Q_{av}}{\mu_D L_{seuil} \sqrt{2g}} \right)^{2/3} + P \quad (5.3)$$

$Q_{av} = Q(x = x_{av}, t)$ est le débit à l'amont du seuil ($m^3.s^{-1}$), μ_D est le coefficient de débit, égal à $\mu_D = 0.38$ pour un seuil épais de section rectangulaire, L_{seuil} est la largeur du seuil (m), H_{av} est la hauteur d'eau au niveau du seuil (m) et P est la hauteur du seuil (m).

Le débit Q est à présent fonction du temps. L'hydrogramme amont, $Q_{am}(t) = Q(x = x_{am}, t)$, est généré à partir de la formule suivante :

$$Q_{am}(t) = Q_b + Q_p \times \left[\frac{t}{t_p} \exp\left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \right]^\ell \quad (5.4)$$

Q_b est le débit de base ($m^3.s^{-1}$), c'est-à-dire le débit avant la montée de crue, Q_p est le débit de pointe ($m^3.s^{-1}$), c'est-à-dire le débit à l'apogée de la crue, t_p est la date du pic (s) et ℓ est un paramètre sans dimension réglant l'étalement de l'hydrogramme (Fig. 5.1) : plus ℓ est grand, moins l'hydrogramme est étalé (Fig. 5.2).

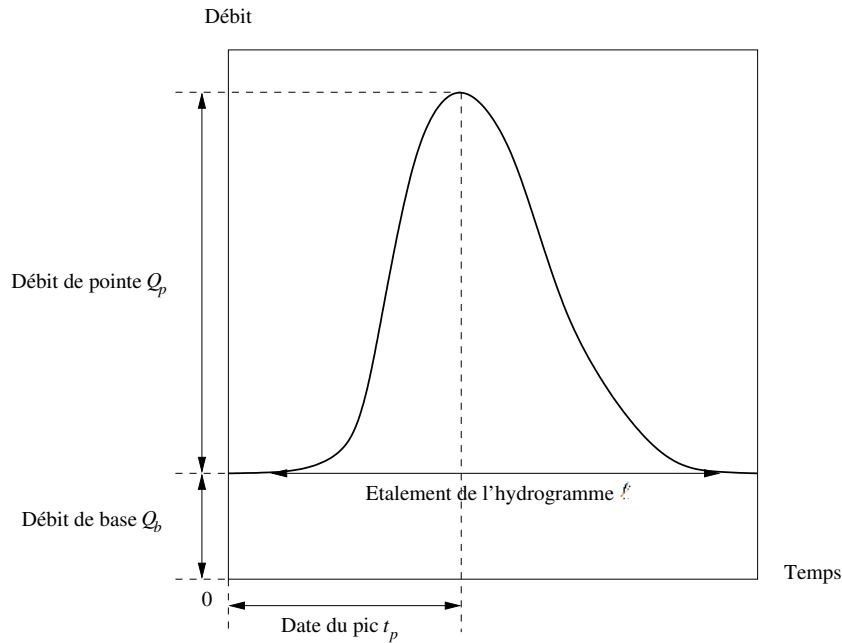


FIG. 5.1 – Hydrogramme : schéma des notations employées

Le cours d'eau étudié présente un lit mineur trapézoïdal et un lit majeur pratiquement plat (Fig. 5.3). La géométrie a été choisie uniforme tout le long du tronçon considéré. La rugosité est composite, elle vaut $K_{s,min}$ en lit mineur et $K_{s,maj}$ en lit majeur. Les valeurs des paramètres du cas test sont récapitulées dans le tableau (5.1). La durée totale de la simulation est de $T = 15500s$, avec un pas de temps $\Delta t = 500 s$. Le pas d'espace est égal à $\Delta x = 100 m$.

Afin de restituer l'asymétrie de l'écoulement, l'axe du cours d'eau est supposé connu et les observations \mathbf{y}^o consistent en deux vecteurs de largeurs de la zone inondée le long du tronçon considéré, à un temps t_k fixé :

- Les largeurs inondées en rive gauche :

$$\mathbf{B}_{t_k}^{o,g} = \mathbf{B}_{t_k}^{v,g} + \gamma \times \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma) \quad (5.5)$$

- Les largeurs inondées en rive droite :

$$\mathbf{B}_{t_k}^{o,d} = \mathbf{B}_{t_k}^{v,d} + \gamma \times \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma) \quad (5.6)$$

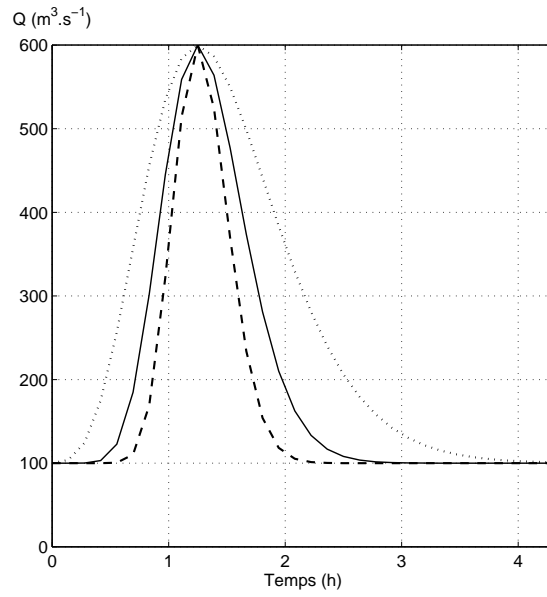


FIG. 5.2 – Influence de l'étalement ℓ : forme de l'hydrogramme pour $\cdots \ell = 6$, $— \ell = 16$, $-- \ell = 35$

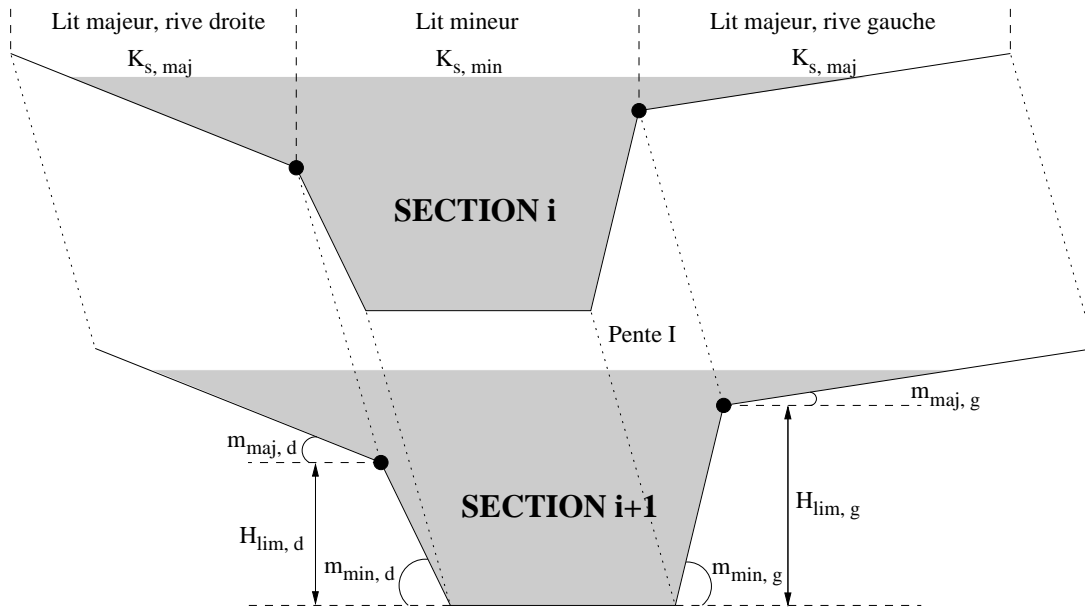


FIG. 5.3 – Géométrie du cours d'eau étudié

Hydrogramme	Débit de base	Q_b	$100 \text{ m}^3.s^{-1}$
	Débit de pointe	Q_p	$500 \text{ m}^3.s^{-1}$
	Date du pic	t_p	$5 \times 10^3 \text{ s}$
	Étalement de l'hydrogramme	ℓ	16
Géométrie	Longueur du tronçon	L	4900 m
	Hauteur du seuil aval	P	4 m
	Strickler du lit mineur	$K_{s,min}$	$30 \text{ m}^{1/3}.s^{-1}$
	Strickler du lit majeur	$K_{s,maj}$	$10 \text{ m}^{1/3}.s^{-1}$
	Pente du fond du lit	I	10^{-5} m.m^{-1}
	Largeur du fond du lit, rive gauche	$B_{0,g}$	20 m
	Largeur du fond du lit, rive droite	$B_{0,d}$	30 m
	Profondeur du lit mineur, rive gauche	$H_{lim,g}$	4 m
	Profondeur du lit mineur, rive droite	$H_{lim,d}$	3 m
	Pente transversale du lit mineur, rive gauche	$m_{min,g}$	1.5 m.m^{-1}
	Pente transversale du lit mineur, rive droite	$m_{min,d}$	2.0 m.m^{-1}
	Pente transversale du lit majeur, rive gauche	$m_{maj,g}$	10^3 m.m^{-1}
	Pente transversale du lit majeur, rive droite	$m_{maj,d}$	800 m.m^{-1}

TAB. 5.1 – Paramètres du cas test

Elles sont générées par bruitage gaussien à partir des largeurs réelles $\mathbf{B}_{t_k}^{v,g}$ et $\mathbf{B}_{t_k}^{v,d}$. γ est un coefficient déterminant l'amplitude du bruitage. Six niveaux de bruit σ ont été testés, ils sont récapitulés dans le tableau (5.2) ainsi que les erreurs induites sur les largeurs au miroir. Pour chaque niveau de bruit, trente tirages ont été effectués. Sauf mention contraire, les données exposées par la suite représentent une moyenne sur ces trente tirages.

Niveau de bruit σ	Erreur induite sur \mathbf{B}^g et \mathbf{B}^d		Erreur RMS	
	minimale	maximale	minimale	maximale
0.006	0.28 m	0.72 m	0.02 %	0.06 %
0.012	0.56 m	1.48 m	0.03 %	0.12 %
0.018	0.82 m	2.25 m	0.05 %	0.19 %
0.024	1.14 m	2.80 m	0.06 %	0.24 %
0.030	1.28 m	3.60 m	0.07 %	0.30 %
0.036	1.72 m	4.14 m	0.09 %	0.34 %

TAB. 5.2 – Niveaux de bruit et erreurs induites correspondantes, sur les largeurs inondées en rive gauche \mathbf{B}^g et en rive droite \mathbf{B}^d , $\gamma = 100$

5.3 Reconstitution du débit amont

5.3.1 Géométrie parfaitement connue

Le but de la procédure décrite dans ce paragraphe est d'estimer le débit amont $Q_{am}(t)$ à chaque pas de temps, tous les autres paramètres étant parfaitement connus. Étant données la

durée de la simulation $T = 15500$ s et la valeur du pas de temps $\Delta t = 500$ s, il s'agit d'estimer 32 valeurs en tout. Afin de pouvoir simuler la cote d'eau $Z(x, t)$ et le débit $Q(x, t)$ le long du cours d'eau à chaque pas de temps, il est nécessaire de connaître la cote d'eau $Z(x, t = 0)$ et le débit $Q(x, t = 0)$ le long du cours d'eau à l'instant initial $t = 0$. Dans un premier temps (§ 5.3.1.1), ces conditions initiales sont supposées parfaitement connues. Dans un deuxième temps (§ 5.3.1.2), elles seront bruitées, afin d'étudier l'influence de la connaissance des conditions initiales sur la reconstitution de l'hydrogramme amont.

A chaque pas de temps, la fonction coût minimisée compare les largeurs au miroir observées au temps correspondant $t = t_k$, $\mathbf{B}_{t_k}^o$, à celles simulées au même instant, $\mathbf{B}_{t_k}^s$, afin d'estimer la valeur du débit amont $Q_{am}(t = t_k)$. Le vecteur des paramètres à estimer est en réalité un scalaire : $x_{t_k} = Q_{am}(t = t_k)$. Les fonctions coûts utilisées sont construites sur les mêmes bases que celles du chapitre 4. Cependant, attendu que la largeur de la zone inondée est asymétrique et que l'axe de l'écoulement est supposé connu, il est possible de comparer les largeurs au miroir observées en rive droite $\mathbf{B}_{t_k}^{o,d}$ et en rive gauche $\mathbf{B}_{t_k}^{o,g}$, à celles simulées au même instant, $\mathbf{B}_{t_k}^{s,d}$ et $\mathbf{B}_{t_k}^{s,g}$, d'où les fonctions coûts :

$$\Phi_1(x_{t_k}) = \sum_{j=1}^{50} \left\{ \left(\mathbf{B}_{t_k}^{o,d}|_j - \mathbf{B}_{t_k}^{s,d}|_j \right)^2 + \left(\mathbf{B}_{t_k}^{o,g}|_j - \mathbf{B}_{t_k}^{s,g}|_j \right)^2 \right\} \quad (5.7)$$

$$\Phi_2(x_{t_k}) = \sum_{j=1}^{50} \left\{ \left(\frac{\mathbf{B}_{t_k}^{o,d}|_j - \mathbf{B}_{t_k}^{s,d}|_j}{\mathbf{B}_{t_k}^{o,d}|_j} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{B}_{t_k}^{o,g}|_j - \mathbf{B}_{t_k}^{s,g}|_j}{\mathbf{B}_{t_k}^{o,g}|_j} \right)^2 \right\} \quad (5.8)$$

$$\Phi_3(x_{t_k}) = \sum_{j=1}^{50} \left\{ \left(\frac{\mathbf{B}_{t_k}^{o,d}|_j - \mathbf{B}_{t_k}^{s,d}|_j}{\mathbf{B}_{t_k}^{s,d}|_j} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{B}_{t_k}^{o,g}|_j - \mathbf{B}_{t_k}^{s,g}|_j}{\mathbf{B}_{t_k}^{s,g}|_j} \right)^2 \right\} \quad (5.9)$$

L'indice spatial j varie de 1 à 50, 50 étant le nombre total de sections de calcul.

5.3.1.1 Ligne d'eau et débit initiaux non bruités

Les conditions initiales $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ sont supposées parfaitement connues. Il s'agit d'un double avantage, puisque non seulement l'initialisation du modèle hydrodynamique est parfaite, mais encore la valeur initiale du paramètre recherché $x_{t=0}^f$ (f pour "forecast") introduite dans le processus d'assimilation est nécessairement proche de la valeur vraie, il suffit de choisir :

$$x_{t=0}^f = Q(x = x_{am}, t = 0) \quad (5.10)$$

L'algorithme de minimisation utilisé est celui décrit au paragraphe (2.2.2.4). Il s'agit d'un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte. Le tableau (5.3) récapitule les valeurs du critère de Nash des hydrogrammes optimaux $Q^a(x = x_{am}, t)$ obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit. Le critère de Nash est calculé à partir de l'hydrogramme amont réel $Q^v(x = x_{am}, t)$:

$$NASH = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{32} (Q_i^v - Q_i^a)^2}{\sum_{i=1}^{32} (Q_i^v - \overline{Q^v})^2}$$

i est l'indice temporel, il varie de 1 à 32, 32 étant le nombre total de pas de temps de la simulation.

L'hydrogramme optimisé obtenu est tout à fait satisfaisant, quel que soit le niveau de bruit sur les observations et quelle que soit la fonction coût minimisée. Il faut cependant garder à l'esprit que le problème est largement surdéterminé : à chaque pas de temps, 100 valeurs observées (50 pour l'extension de la zone inondée rive droite et 50 pour celle rive gauche) sont utilisées pour estimer une seule valeur, celle du débit amont à cet instant.

Niveau de bruit σ sur les observations	NASH		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
0.006	1	1	1
0.012	0.99998	0.99998	0.99998
0.018	0.99997	0.99997	0.99997
0.024	0.99995	0.99993	0.99993
0.030	0.99995	0.99995	0.99994
0.036	0.99986	0.99984	0.99984

TAB. 5.3 – Valeurs du critère de Nash pour les hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit

5.3.1.2 Ligne d'eau et débit initiaux bruités

Les conditions initiales $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ sont supposées connues, mais, afin de tenir compte des incertitudes inhérentes à leur obtention, les valeurs réelles ont été bruitées au moyen d'un bruit gaussien, de moyenne nulle et de variance σ_{init} fixée.

$$\mathbf{Z}_{t=0}^o = \mathbf{Z}_{t=0}^y \times (1 + \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma_{init})) \quad (5.11)$$

$$\mathbf{Q}_{t=0}^o = \mathbf{Q}_{t=0}^y \times (1 + \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma_{init})) \quad (5.12)$$

Les résultats exposés par la suite correspondent à un niveau de bruit $\sigma_{init} = 0.006$, ce qui induit une erreur relative moyenne égale à 0.47 % sur la cote d'eau initiale $Z(x, t = 0)$ et 0.37 % sur le débit initial $Q(x, t = 0)$ (Fig. 5.4).

Afin de tester les influences respectives de la cote d'eau initiale et du débit initial sur le débit amont optimisé, plusieurs cas de figure ont été envisagés :

- $Z(x, t = 0)$ est bruitée, $Q(x, t = 0)$ n'est pas bruité,
- $Z(x, t = 0)$ n'est pas bruitée, $Q(x, t = 0)$ est bruité,
- $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ sont bruités.

Les tableaux (5.4), (5.5) et (5.6) réunissent les valeurs du critère de Nash des hydrogrammes optimaux $Q^a(x = x_{am}, t)$ obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , pour tous les niveaux de bruit, dans les trois configurations exposées ci-dessus.

Niveau de bruit σ sur les observations	NASH		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
0.006	0.99788	0.99788	0.99817
0.012	0.99786	0.99785	0.99814
0.018	0.9979	0.99797	0.99823
0.024	0.99775	0.99775	0.99804
0.030	0.99801	0.99801	0.99826
0.036	0.99756	0.99755	0.99787

TAB. 5.4 – Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit, $Z(x, t = 0)$ bruitée, $Q(x, t = 0)$ non bruité

Dans les trois cas, l'hydrogramme optimisé obtenu est satisfaisant, quel que soit le niveau de bruit sur les observations et quelle que soit la fonction coût minimisée. Cependant, il ressort de cette analyse que la cote d'eau initiale $Z(x, t = 0)$ semble avoir une influence plus grande sur le

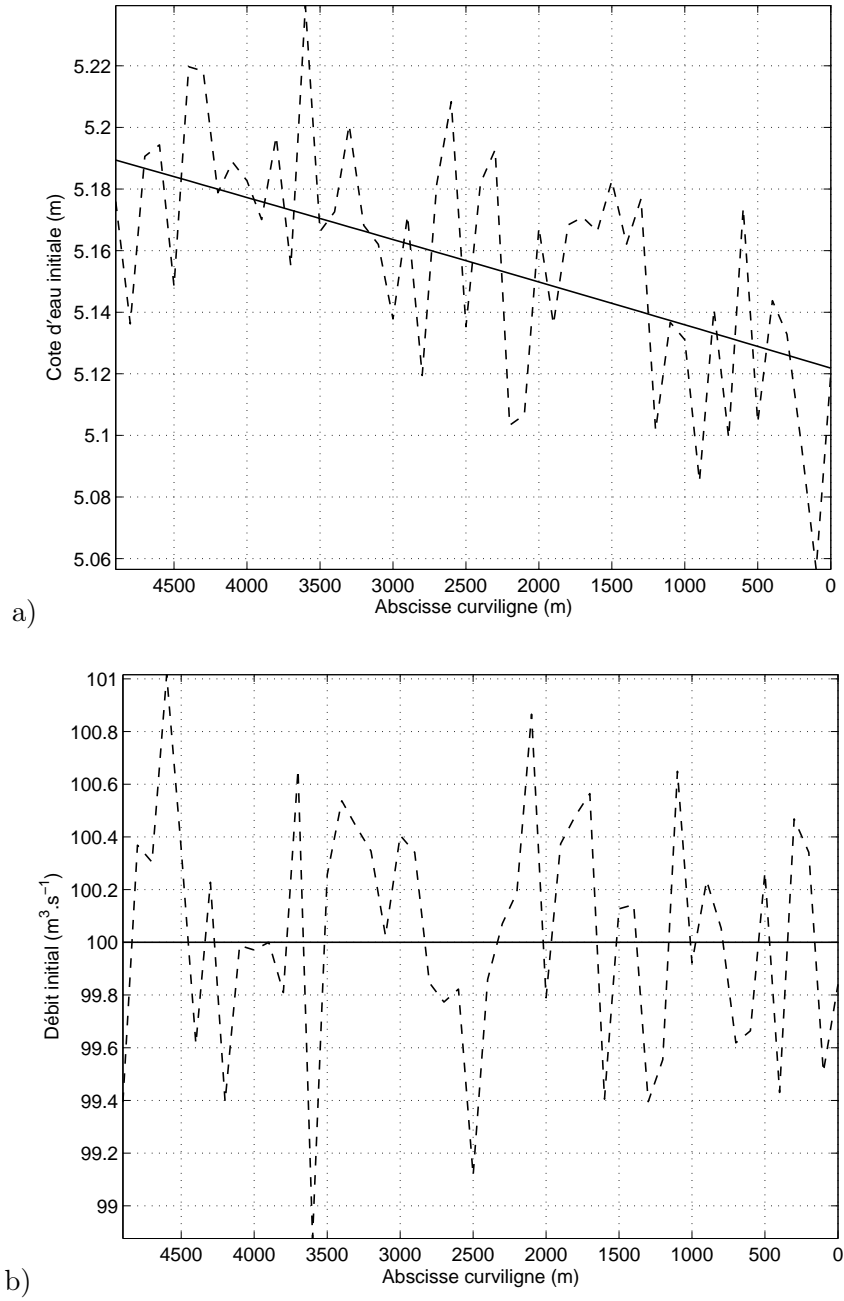


FIG. 5.4 – Conditions initiales, — réelles, -- bruitées, $\sigma_{init} = 0.006$: a) Cote d'eau, b) Débit

Niveau de bruit σ sur les observations	<i>NASH</i>		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
0.006	1	1	1
0.012	0.99998	0.99998	0.99998
0.018	0.99997	0.99997	0.99997
0.024	0.99995	0.99993	0.99993
0.030	0.99995	0.99994	0.99994
0.036	0.99986	0.99984	0.99985

TAB. 5.5 – Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit, $Z(x, t = 0)$ non bruitée, $Q(x, t = 0)$ bruité

Niveau de bruit σ sur les observations	<i>NASH</i>		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
0.006	0.99792	0.99789	0.99818
0.012	0.99789	0.99789	0.99817
0.018	0.99798	0.99799	0.99826
0.024	0.99779	0.99779	0.99808
0.030	0.99804	0.99805	0.99832
0.036	0.99760	0.99731	0.99790

TAB. 5.6 – Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit, $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ bruités

résultat final que le débit initial $Q(x, t = 0)$. En effet, lorsque $Z(x, t = 0)$ n'est pas bruitée mais que $Q(x, t = 0)$ l'est, les valeurs obtenues pour le critère de Nash (Tab. 5.5) sont comparables à celles obtenues lorsque ni $Z(x, t = 0)$ ni $Q(x, t = 0)$ n'étaient bruitées (§ 5.3.1.1). En revanche, lorsque $Z(x, t = 0)$ est bruitée, ces valeurs sont légèrement inférieures, le fait que $Q(x, t = 0)$ soit ou non bruité n'intervenant pas de façon notable (Tab. 5.4 et 5.6).

5.3.1.3 Conclusions

Le but de l'analyse ci-dessus était de tester la possibilité de reconstituer un hydrogramme de crue $Q(x = x_{am}, t)$, à partir d'observations consistant en des extensions de zone inondée, en rive droite et en rive gauche. Ces observations ont été générées numériquement par bruitage gaussien à partir des valeurs simulées à l'aide des paramètres "réels". La géométrie du cours d'eau ainsi que les coefficients de Strickler du lit mineur et du lit majeur sont supposés parfaitement connus. Plusieurs tests ont été effectués, au cours desquels les conditions initiales $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ sont supposées parfaitement connues ou bien sont bruitées pour reproduire des incertitudes dues aux moyens d'obtention de ces valeurs. L'hydrogramme de crue $Q(x = x_{am}, t)$ est reconstitué par minimisation d'une fonction coût pour laquelle trois expressions ont été expérimentées (Eq. 5.7, 5.8 et 5.9).

Quel que soit le cas de figure et quel que soit le niveau de bruit, l'hydrogramme reconstitué est satisfaisant ($NASH \geq 0.99731$). Il s'agissait cependant d'une configuration extrêmement favorable, et ce pour plusieurs raisons :

- Le nombre d'observations dépasse largement le nombre de paramètres à optimiser : 100 valeurs observées (50 pour l'extension de la zone inondée rive droite et 50 pour celle rive gauche) pour un seul paramètre à optimiser,
- La valeur initiale du paramètre recherché est très proche de la valeur vraie. Au premier

pas de temps, il suffit de prendre $x_{t=0}^f = Q(x = x_{am}, t = 0)$, même lorsque le débit initial est bruité, cette valeur reste proche de la valeur réelle. Pour les pas de temps suivants, il suffit de choisir à chaque fois la valeur optimisée au pas de temps précédent $x_{t_k}^f = x_{t_{k-1}}^a$. Les trois fonctions coûts utilisées ont fourni des performances comparables.

5.3.2 Géométrie bruitée

La méthodologie employée est identique à celle du paragraphe précédent (§ 5.3.1) : il s'agit de tester la possibilité de reconstituer un hydrogramme de crue $Q(x = x_{am}, t)$, à partir d'observations consistant en des extensions de la zone inondée, en rive droite et en rive gauche. La géométrie du cours d'eau ainsi que les coefficients de Strickler du lit mineur et du lit majeur sont toujours supposés connus, cependant, à présent, les valeurs des paramètres ne sont pas prises égales aux valeurs “vraies” mais bruitées elles aussi au moyen d'un bruit gaussien, afin de reproduire la connaissance généralement imparfaite qu'en a le modélisateur. Prenant l'exemple de la profondeur du lit mineur, ce bruitage est effectué de la façon suivante :

$$\mathbf{H}_{\text{lim}}^{\circ} = \mathbf{H}_{\text{lim}}^{\vee} \times (1 + \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma_{geom})) \quad (5.13)$$

Les exposants $^{\circ}$, pour “observée”, et $^{\vee}$, pour “vraie”, se rapportent respectivement aux valeurs bruitées et aux valeurs vraies du paramètre. Les erreurs induites par ce bruitage sur les paramètres “connus” sont récapitulées dans le tableau (5.7), pour $\sigma_{geom} = 0.006$.

Paramètre	Erreur absolue	Erreur RMS
P	0.01 m	0.46 %
$K_{s,min}$	0.04 $m^{1/3}.s^{-1}$	0.13 %
$K_{s,maj}$	0.05 $m^{1/3}.s^{-1}$	0.51 %
I	$4.56 \times 10^{-8} m.m^{-1}$	0.46 %
$B_{0,g}$	0.09 m	0.47 %
$B_{0,d}$	0.12 m	0.41 %
$H_{lim,g}$	0.02 m	0.53 %
$H_{lim,d}$	0.01 m	0.38 %
$m_{min,g}$	0.01 $m.m^{-1}$	0.44 %
$m_{min,d}$	0.01 $m.m^{-1}$	0.44 %
$m_{maj,g}$	4.87 $m.m^{-1}$	0.49 %
$m_{maj,d}$	3.63 $m.m^{-1}$	0.45 %

TAB. 5.7 – Erreurs moyennes induites par le bruitage sur les paramètres “connus”, $\sigma_{geom} = 0.006$

Les conditions initiales $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ sont bruitées, comme au paragraphe précédent (§ 5.3.1.2), avec un niveau de bruit $\sigma_{init} = 0.006$. Le tableau (5.8) récapitule les valeurs du critère de Nash des hydrogrammes optimaux $Q^a(x = x_{am}, t)$ obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit.

Le cas de figure envisagé dans ce paragraphe se rapproche davantage d'une situation à laquelle un hydraulicien est susceptible d'être confrontée : la géométrie du cours d'eau ainsi que les conditions initiales sont connues, mais avec une marge d'incertitude. L'hydrogramme amont reconstitué reste satisfaisant : le critère de Nash est supérieur à 0.97535 pour tous les niveaux de bruit et pour les trois fonctions coûts. Cela reste vrai pour $\sigma_{geom} = 0.012$. Lorsque $\sigma_{geom} = 0.024$, certains tirages fournissent une valeur optimale négative pour Q_{am} . Il devient donc nécessaire

Niveau de bruit σ sur les observations	$NASH$		
	Φ_1	Φ_2	Φ_3
0.006	0.97700	0.97986	0.99818
0.012	0.97642	0.98032	0.99817
0.018	0.98017	0.98253	0.99826
0.024	0.97535	0.97696	0.99808
0.030	0.98529	0.98517	0.99832
0.036	0.97681	0.97941	0.99790

TAB. 5.8 – Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 pour tous les niveaux de bruit, $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ bruités : $\sigma_{init} = 0.006$, géométrie bruitée : $\sigma_{geom} = 0.006$

d'introduire une limite inférieure dans le processus de minimisation pour contraindre le débit à rester positif. Le résultat reste cependant nettement moins satisfaisant comme le montre la figure (5.5) qui compare les hydrogrammes amonts réel et optimisé par minimisation de Φ_1 , pour un niveau de bruit sur les observations $\sigma = 0.006$. Le critère de Nash correspondant à cet hydrogramme est de $NASH = 0.88480$. Néanmoins, la date du pic t_p est bien reconstituée : elle est identique pour l'hydrogramme optimisé et pour l'hydrogramme réel.

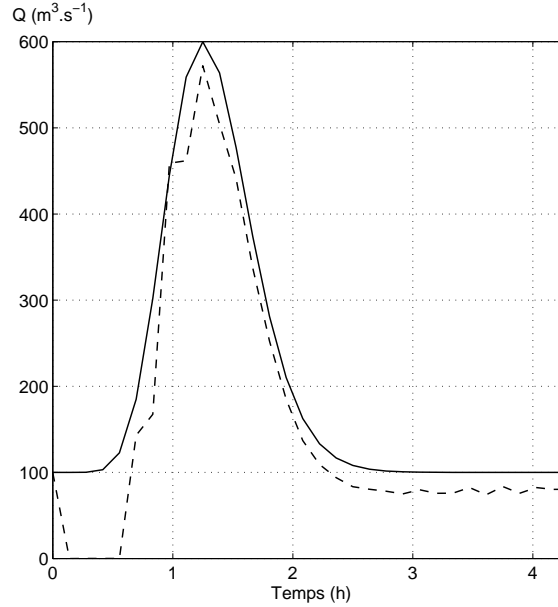


FIG. 5.5 – Hydrogrammes amonts, — réel et -- optimisé par minimisation de Φ_1 , $\sigma_{geom} = 0.024$, $\sigma = 0.006$, premier tirage

Lorsque les incertitudes sur la géométrie deviennent trop importantes (cf. Tab. 5.9 pour $\sigma_{geom} = 0.024$), il s'avère donc difficile de reconstituer $Q(x = x_{am}, t)$.

Ici encore, les trois fonctions coûts testées ont fourni des performances comparables.

Paramètre	Erreur absolue	Erreur RMS
P	0.04 m	0.94 %
$K_{s,min}$	$1.49 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$	4.98 %
$K_{s,maj}$	$0.08 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$	0.78 %
I	$2.04 \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	2.04 %
$B_{0,g}$	0.037m	1.86 %
$B_{0,d}$	0.55 m	1.82 %
$H_{lim,g}$	0.09 m	2.18 %
$H_{lim,d}$	0.07 m	2.37 %
$m_{min,g}$	$0.03 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	1.91 %
$m_{min,d}$	$0.03 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	1.74 %
$m_{maj,g}$	$19.8 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	1.99 %
$m_{maj,d}$	$15.1 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}$	1.88 %

 TAB. 5.9 – Erreurs moyennes induites par le bruitage sur les paramètres “connus”, $\sigma_{geom} = 0.024$

5.4 Reconstitution du débit initial et du débit amont

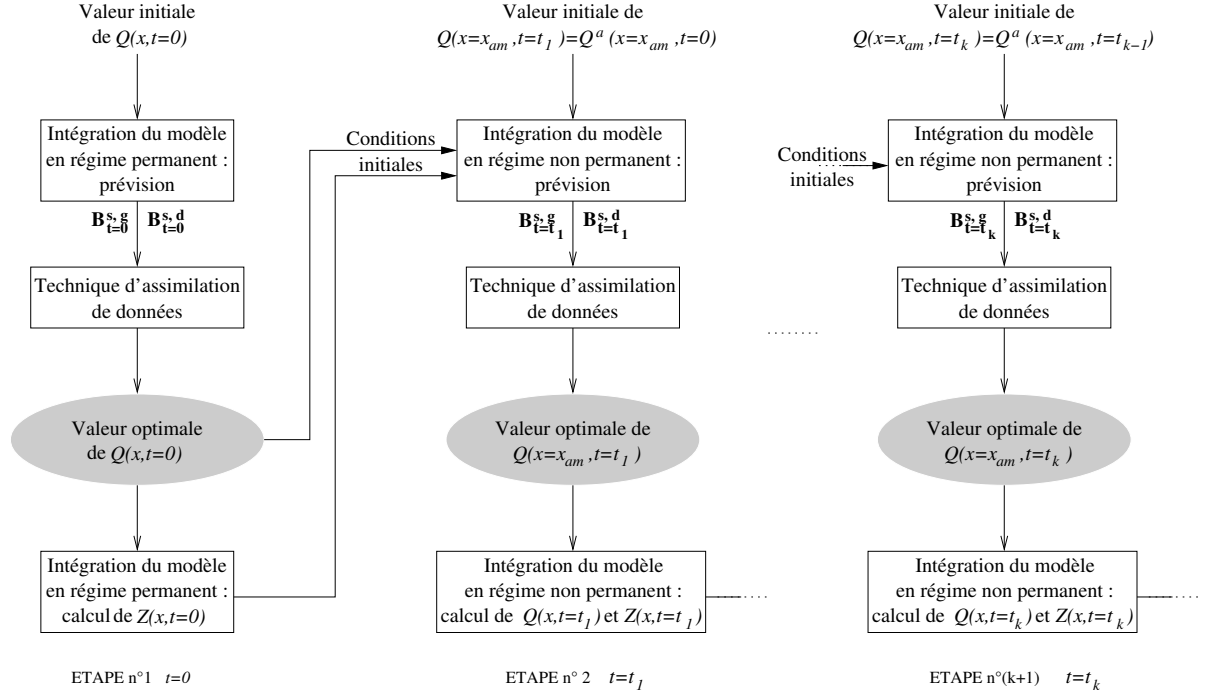
A présent, les conditions initiales $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$ sont également inconnues. Il faut commencer par reconstituer l'état du système à $t = 0$, avant de pouvoir s'intéresser à l'hydrogramme amont. Il n'est toutefois pas nécessaire d'estimer à la fois $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$. En effet, en reconstituant le débit $Q(x, t = 0)$ seulement, il est ensuite possible de calculer la cote d'eau correspondante $Z(x, t = 0)$ en résolvant le modèle hydrodynamique en régime permanent. La figure (5.6) schématise les différentes étapes de la méthode. Lors de la reconstitution du débit amont seulement (§ 5.3), les trois fonctions coûts testées ont fourni des performances pratiquement identiques, c'est pourquoi seule la fonctionnelle Φ_1 sera utilisée par la suite. Une première série de tests a montré la nécessité d'introduire des contraintes dans le processus de minimisation. L'initialisation de l'algorithme ainsi que les contraintes utilisées sont récapitulées dans le tableau (5.10).

	$Q(x, t = 0)$	$Q(x = x_{am}, t)$
Valeur initiale	$150 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$	$Q^a(x = x_{am}, t = 0)$
Borne inférieure	$80 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$	$100 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
Borne supérieure	$180 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$	$10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

 TAB. 5.10 – Valeurs initiales et intervalles de variation utilisés dans l'algorithme de minimisation, pour $Q(x, t = 0)$ et $Q(x = x_{am}, t)$

5.4.1 Géométrie parfaitement connue

La géométrie est supposée connue de façon exacte. Le tableau (5.11) liste l'erreur relative moyenne (Eq. 5.14) sur le débit initial optimisé $Q^a(x, t = 0)$, calculée comme suit :


 FIG. 5.6 – Méthodologie de la reconstitution de $Q(x, t=0)$ et $Q(x=x_{am}, t)$

$$\delta_{Q(x,t=0)}^a = \sum_{j=1}^{50} \left| \frac{Q_j^v - Q_j^a}{Q_j^v} \right| \quad (5.14)$$

j est l'indice spatial de sommation, il varie de 1 à 50, 50 étant le nombre de sections de calcul.

Niveau de bruit σ sur les observations	$\delta_{Q(x,t=0)}^a$ Φ_1
0.006	3.53 %
0.012	4.55 %
0.018	5.63 %
0.024	5.38 %
0.030	5.96 %
0.036	5.71 %

 TAB. 5.11 – Erreurs relatives moyennes sur le débit initial optimisé, obtenu par minimisation de Φ_1 pour tous les niveaux de bruit

Le résultat n'est pas entièrement satisfaisant comme la figure (5.7) le met en évidence. En particulier, le débit amont $Q^a(x=x_{am}, t=0)$ est égal à l'estimation initiale. Cependant, même avec un débit initial très bruité, le débit amont reconstitué $Q^a(x, t=0)$ est satisfaisant puisque les critères de Nash obtenus sont supérieurs à 0.99676, quel que soit le niveau de bruit (Tab. 5.12). Cela confirme les remarques faites au paragraphe précédent (§ 5.3.1.2), à savoir :

- Même lorsque les conditions initiales $Z(x, t=0)$ et $Q(x, t=0)$ sont bruitées, il est possible de reconstituer l'hydrogramme amont,
- Lorsque seul le débit initial $Q(x, t=0)$ est bruité, l'hydrogramme amont est mieux estimé que si la cote d'eau initiale $Z(x, t=0)$ est également bruitée. C'est le cas ici, comme le

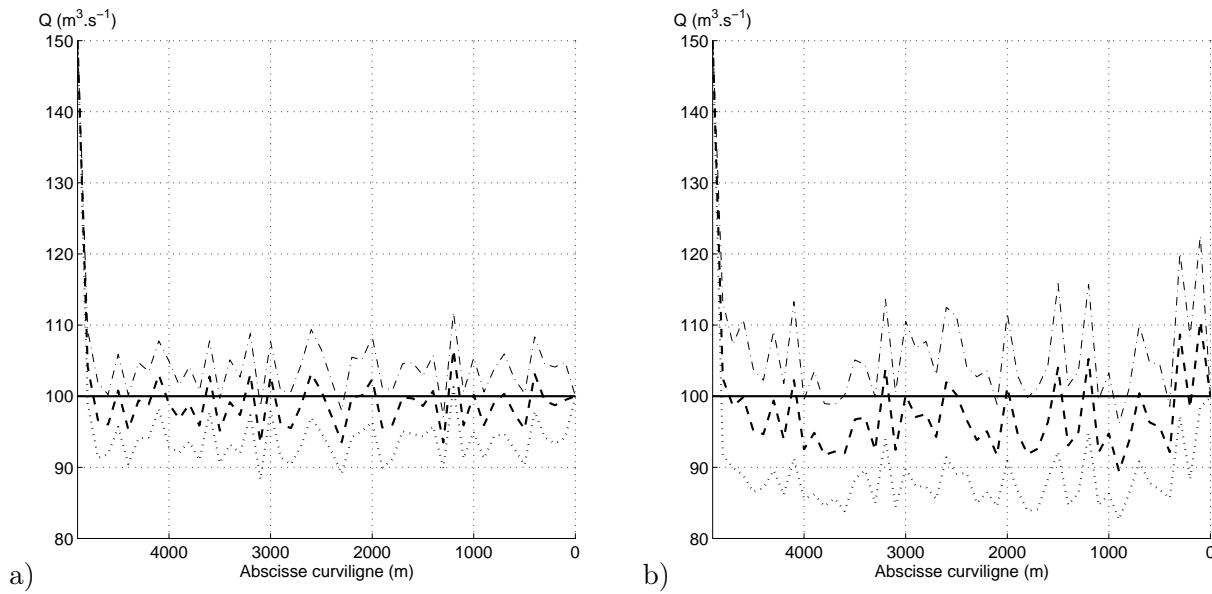


FIG. 5.7 – Débits initiaux — réel et -- optimisé et leurs intervalles de confiance respectifs : ... borne inférieure, -.- borne supérieure, pour un niveau de bruit sur les observations a) $\sigma = 0.006$, b) $\sigma = 0.036$

Niveau de bruit σ sur les observations	$NASH$
	Φ_1
0.006	0.99683
0.012	0.99683
0.018	0.99683
0.024	0.99681
0.030	0.99681
0.036	0.99676

TAB. 5.12 – Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 pour tous les niveaux de bruit

montrent le tableau (5.13) et la figure (5.8) : le débit initial reconstitué présente une erreur relative moyenne supérieure à 3.53 %, mais cela n'induit qu'une erreur RMS très faible sur $Z(x, t = 0)$, toujours inférieure à 0.05 %.

Niveau de bruit σ sur les observations	$\delta_{Q(x,t=0)}^a$	Erreur RMS induite sur $Z(x, t = 0)$
	Φ_1	
0.006	3.53 %	0.02 %
0.012	4.55 %	0.03 %
0.018	5.63 %	0.04 %
0.024	5.38 %	0.04 %
0.030	5.96 %	0.04 %
0.036	5.71 %	0.05 %

TAB. 5.13 – Erreur RMS sur la cote d'eau initiale $Z(x, t = 0)$ calculée à partir du débit initial optimisé $Q^a(x, t = 0)$

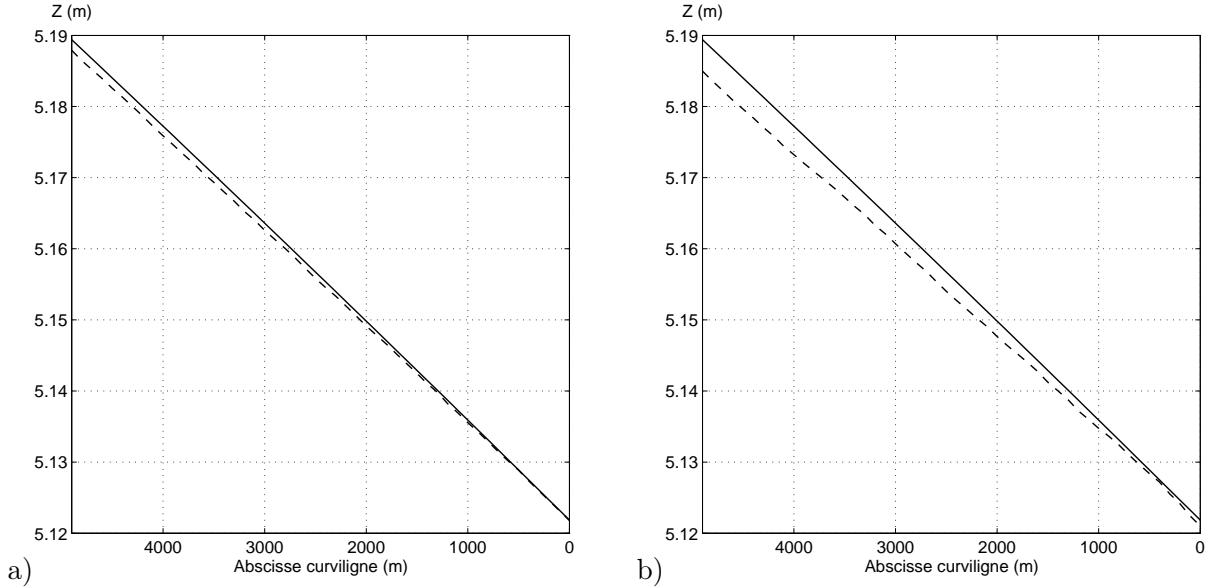


FIG. 5.8 – Cotes d'eau initiales — réelle et -- calculée à partir de $Q^a(x, t = 0)$, pour un niveau de bruit sur les observations a) $\sigma = 0.006$, b) $\sigma = 0.036$

5.4.2 Géométrie bruitée

La géométrie est connue, mais de façon imparfaite. Elle est bruitée, de la même manière qu'au paragraphe (5.3.2).

Quel que soit le niveau de bruit, le débit initial n'est pas identifié (Tab. 5.14). La figure (5.9) montre le débit initial estimé $Q^a(x, t = 0)$ pour un niveau de bruit sur les observations de $\sigma = 0.024$ et un niveau de bruit sur la géométrie de $\sigma_{geom} = 0.006$: l'estimation oscille entre la valeur supérieure et la valeur inférieure de l'intervalle de variation imposé dans l'algorithme de minimisation. En revanche, le débit amont estimé $Q^a(x = x_{am}, t)$ est, lui, satisfaisant : les critères de Nash correspondant aux différents niveaux de bruit sont tous supérieurs à 0.99612. Comme constaté au paragraphe précédent (§ 5.4.1), l'erreur sur la cote d'eau initiale $Z(x, t = 0)$

simulée à partir du débit initial estimé $Q^a(x, t = 0)$ est faible : elle est inférieure à 0.09 %. L'importance de $Z(x, t = 0)$ par rapport à $Q(x, t = 0)$ dans la reconstitution de l'hydrogramme amont, importance mise en évidence au paragraphe (5.3.1.2), est retrouvée ici également.

Niveau de bruit σ sur les observations	$\delta_{Q(x,t=0)}^a$ Φ_1
0.006	29.7 %
0.012	29.4 %
0.018	29.1 %
0.024	28.9 %
0.030	28.4 %
0.036	28.7 %

TAB. 5.14 – Erreurs relatives moyennes sur le débit initial optimisé, obtenu par minimisation de Φ_1 pour tous les niveaux de bruit, géométrie bruitée : $\sigma_{geom} = 0.006$

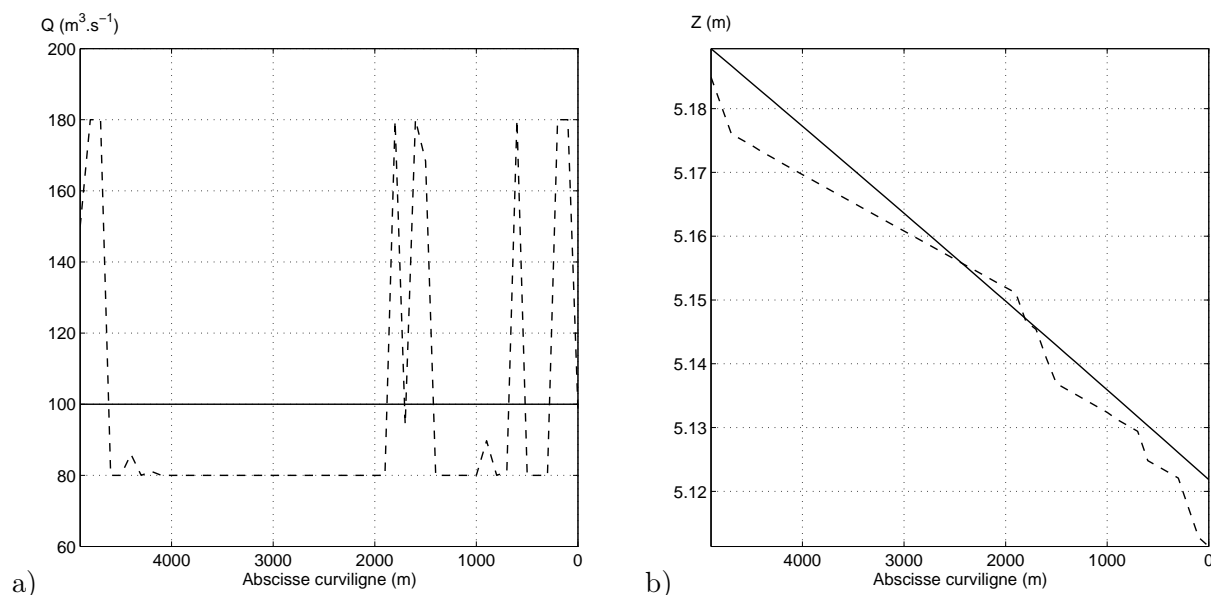


FIG. 5.9 – a) Débit initial, b) Cote d'eau initiale, valeur — réelle et -- optimisée, pour un niveau de bruit sur les observations $\sigma = 0.024$, géométrie bruitée : $\sigma_{geom} = 0.006$

Il apparaît donc possible de reconstituer $Q(x = x_{am}, t)$, même lorsque le débit initial est mal connu. Il faut cependant garder à l'esprit que, si l'estimation de $Q^a(x, t = 0)$ n'est pas bonne, le fait d'introduire des contraintes, relativement fortes, permet néanmoins de ne pas obtenir des valeurs trop éloignées de la valeur "vraie".

5.5 Analyse de sensibilité

La sensibilité du modèle à l'hydrogramme amont est testée en faisant varier les caractéristiques de cet hydrogramme, c'est-à-dire son débit de base Q_b , le débit de pointe Q_p , la date du pic t_p et enfin l'étalement de l'hydrogramme ℓ . 10000 jeux de ces 4 paramètres ont été tirés de façon aléatoire à partir des distributions uniformes de chaque paramètre au sein de son intervalle

Niveau de bruit σ sur les observations	$NASH$
	Φ_1
0.006	0.99613
0.012	0.99615
0.018	0.99613
0.024	0.99615
0.030	0.99624
0.036	0.99612

TAB. 5.15 – Critères de Nash des hydrogrammes amonts optimaux obtenus par minimisation de Φ_1 pour tous les niveaux de bruit, géométrie bruitée : $\sigma_{geom} = 0.006$

de variation (Tab. 5.16). Une fois ce tirage effectué, l’hydrogramme amont est calculé à l’aide de l’équation (5.4).

Paramètre	Valeur	
	minimale	maximale
Q_b	$10 \text{ m}^3.s^{-1}$	$200 \text{ m}^3.s^{-1}$
Q_p	$250 \text{ m}^3.s^{-1}$	$10^3 \text{ m}^3.s^{-1}$
t_p	10^3 s	10^4 s
ℓ	6	35

TAB. 5.16 – Intervalles de variation utilisés pour les simulations Monte-Carlo

Les expressions des fonctions de vraisemblance utilisées sont les mêmes qu’au chapitre 4, mais relatives au débit cette fois :

- l’inverse de la somme des carrés des erreurs (Nash & Sutcliffe, 1970) :

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{\sum_i (\mathbf{Q}^v|_i - \mathbf{Q}^s|_i)^2} \quad (5.15)$$

- l’efficacité du modèle :

$$\mathcal{L}_e = 1 - \frac{\sum_i (\mathbf{Q}^v|_i - \mathbf{Q}^s|_i)^2}{\sum_i (\mathbf{Q}^v|_i - \overline{\mathbf{Q}^v})^2}, \quad \sum_i (\mathbf{Q}^v|_i - \mathbf{Q}^s|_i)^2 < \sum_i (\mathbf{Q}^v|_i - \overline{\mathbf{Q}^v})^2 \quad (5.16)$$

- la fonction de vraisemblance élaborée par Freer *et al.* (1996), avec $N = 1$:

$$\mathcal{L}_f = \exp \left(-N \frac{\sum_i (\mathbf{Q}^v|_i - \mathbf{Q}^s|_i)^2}{\sum_i (\mathbf{Q}^v|_i - \overline{\mathbf{Q}^v})^2} \right) \quad (5.17)$$

Les 1000 meilleures simulations, c’est-à-dire les 1000 simulations ayant les plus fortes valeurs de vraisemblance, ont été retenues comme ayant un “comportement correct” (Fig. 5.10, pour \mathcal{L}_e), ce qui permet de calculer les valeurs de la statistique de Kolmogorov d_{m_c, n_c} correspondant à chaque fonction de vraisemblance (Tab. 5.17). Les valeurs critiques de d_{m_c, n_c} , correspondant à $n_c = 1000$ simulations *behavioural* et $m_c = 9000$ simulations *non-behavioural*, sont récapitulées

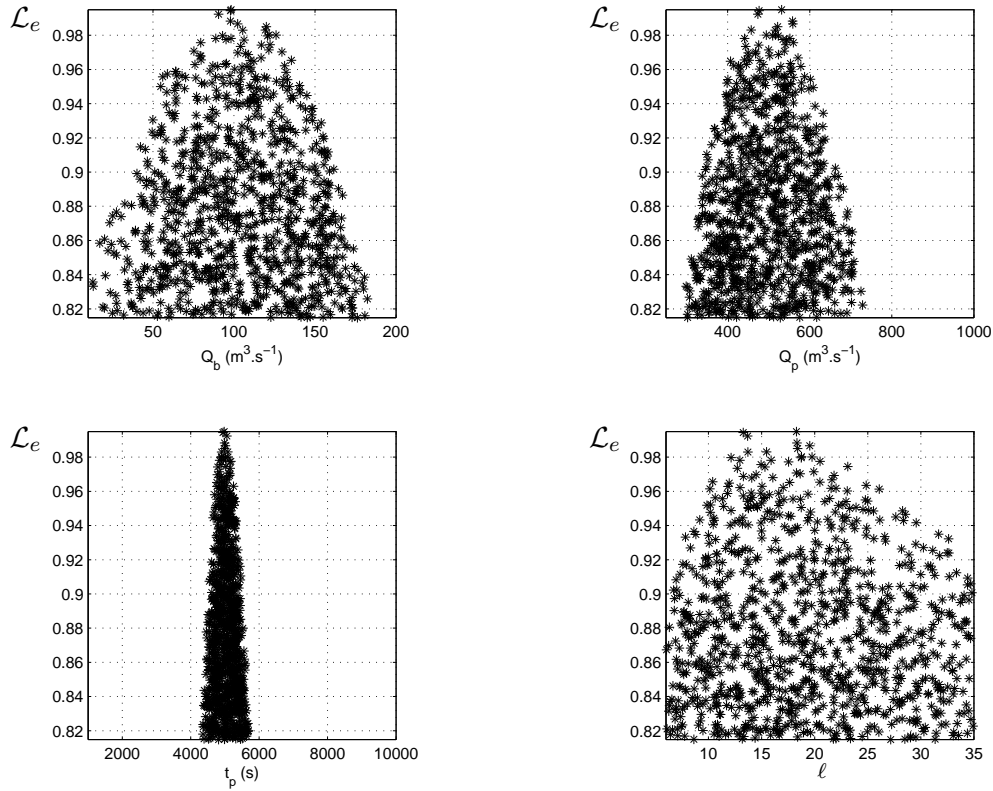


FIG. 5.10 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations *behavioural*

Paramètre	d_{m_c, n_c}		
	\mathcal{L}_s	\mathcal{L}_e	\mathcal{L}_f
Q_b	0.2099	0.1720	0.1734
Q_p	0.2847	0.2356	0.2382
t_p	0.3289	0.3266	0.3199
ℓ	0.2412	0.1671	0.1672

TAB. 5.17 – Valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo, $n_c = 1000$

Niveau de signification	Risque de première espèce	Valeur critique de d_{m_c, n_c}
90.0 %	0.100	0.041
95.0 %	0.050	0.045
97.5 %	0.025	0.049
99.0 %	0.010	0.054
99.5 %	0.005	0.058
99.9 %	0.001	0.065

TAB. 5.18 – Valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, compte-tenu de la taille des échantillons

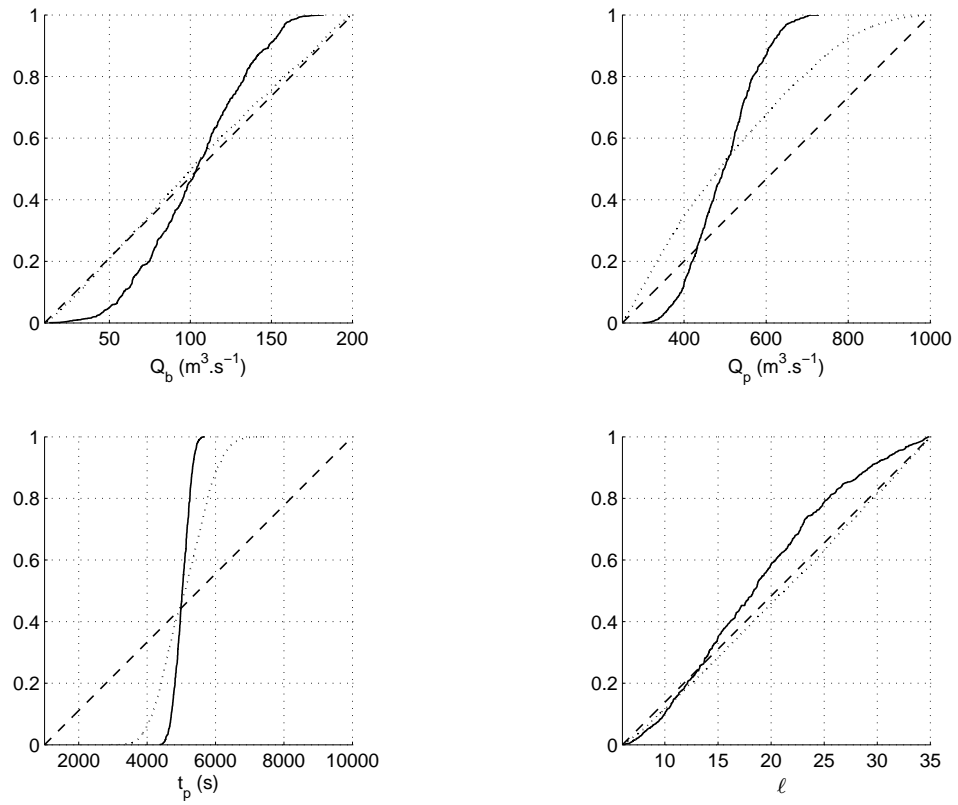


FIG. 5.11 – Densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres, calculées à partir de la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

dans le tableau (5.18). La figure (5.11) présente les densités de probabilité à partir desquelles ont été calculées les valeurs de d_{m_e, n_e} pour la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e . L'annexe D, § (D.1) et (D.2) expose l'ensemble des figures obtenues pour les trois fonctions de vraisemblance.

Le modèle est particulièrement sensible à la date du pic t_p : c'est pour ce paramètre que la valeur de d_{m_e, n_e} est maximale, et ce pour les trois fonctions de vraisemblance testées. Viennent ensuite le débit de pointe Q_p , comme le montre bien la figure (5.10) et le débit de base Q_b . L'étalement de l'hydrogramme ℓ semble avoir une influence moindre. Il est néanmoins difficile de tirer une conclusion définitive étant donné que ce paramètre est probablement étroitement relié à la date du pic t_p . Cependant, lorsque ℓ est fixé à $\ell = 36$, les trois autres paramètres étant fixés à leur valeur vraie (cf. Tab. 5.1), l'erreur moyenne relative résultante sur l'hydrogramme est de $\delta_Q = 12.3 \%$ pour une erreur initiale sur ℓ égale à $\delta_\ell = 62.5 \%$. La même erreur initiale sur t_p , $\delta_{t_p} = 62.5 \%$ soit $t_p = 8125$ s, tous les autres paramètres conservant leur valeur vraie, conduit à une erreur relative moyenne égale à $\delta_Q = 108 \%$ (Fig. 5.12). Cette constatation confirme bien que le rôle de ℓ est moins décisif que celui de t_p dans la détermination du comportement du modèle. Les résultats de l'estimation du débit amont, lorsque la géométrie connue est très bruitée (§ 5.3.2) témoignent également de l'importance de t_p : la modèle y étant très sensible, t_p est identifié, même lorsque l'hydrogramme reconstitué n'est pas satisfaisant.

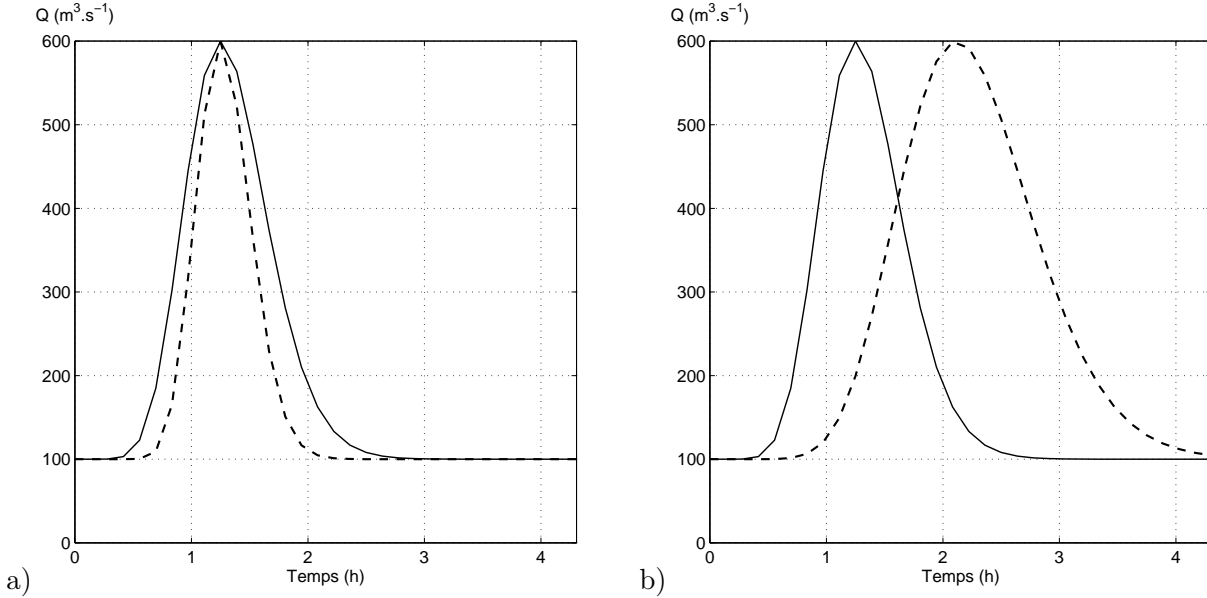


FIG. 5.12 – Variation de l'hydrogramme résultant d'une erreur relative de 62.5 % : a) sur l'étalement de l'hydrogramme ℓ , b) sur la date du pic t_p , — hydrogramme réel, -- hydrogramme résultant de l'erreur sur le paramètre choisi

5.6 Conclusions

Ce chapitre traite du cas d'un écoulement monodimensionnel en régime non permanent. Le but est d'arriver à estimer un hydrogramme de crue, à partir de données de télédétection, lorsque la géométrie du cours d'eau est connue, avec plus ou moins de précision. Deux configurations ont été étudiées, selon que les conditions initiales nécessaires à la résolution du modèle, $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$, sont supposées connues ou inconnues.

Lorsque les conditions initiales sont connues, l'hydrogramme amont est parfaitement reconstitué. En bruitant alternativement $Z(x, t = 0)$ et $Q(x, t = 0)$, une influence majeure de $Z(x, t = 0)$

par rapport à $Q(x, t = 0)$, sur l'hydrogramme estimé, est mise à jour. En effet, lorsque $Z(x, t = 0)$ est bruitée, que $Q(x, t = 0)$ soit ou non bruité, l'hydrogramme optimisé est moins satisfaisant que lorsque seul $Q(x, t = 0)$ est bruité. Par ailleurs, les trois expressions de fonction coût employées dans ce cas de figure ont fourni des performances comparables.

Lorsque les conditions initiales sont inconnues, la première étape de la méthode utilisée consiste à estimer le débit initial $Q(x, t = 0)$, et à simuler la cote d'eau initiale $Z(x, t = 0)$ à partir de $Q^a(x, t = 0)$. De manière générale, le débit initial est assez mal reconstitué. Néanmoins, cela affecte peu l'estimation de l'hydrogramme amont, qui reste très bonne. Il est donc possible d'identifier $Q(x = x_{am}, t)$, même lorsque les conditions initiales sont relativement mal connues.

Une faible incertitude sur la géométrie connue (de 0.10 % à 0.50 % selon les paramètres, Tab. 5.7), n'affecte pas ces résultats de façon notable. En revanche, lorsque cette incertitude est trop importante (de 0.80 % à 5.00 % selon les paramètres, Tab. 5.9), il devient difficile d'obtenir une estimation satisfaisante pour l'hydrogramme amont $Q(x = x_{am}, t)$.

Synthèse sur les expériences jumelles

Deux cas de figure ont été examinés, afin de tester la faisabilité de l'estimation de paramètres à partir de données, générées numériquement pour imiter les informations susceptibles d'être fournies par la télédétection :

- Cas d'un écoulement monodimensionnel permanent (chapitre 4) : les paramètres recherchés sont constants en temps et en espace. Les méthodes d'assimilation employées sont : la minimisation d'une fonction coût, trois expressions différentes ont été expérimentées, et le filtre de Kalman étendu.
- Cas d'un écoulement monodimensionnel non permanent (chapitre 5) : les paramètres recherchés peuvent varier dans le temps (Ex. : l'hydrogramme amont $Q(x = x_{am}, t)$) et/ou dans l'espace (Ex. : le débit initial le long du cours d'eau $Q(x, t = 0)$). La méthode d'assimilation employée est la minimisation d'une fonction coût.

La première remarque, découlant de l'ensemble de ces tests, est que les résultats sont encourageants. Dans les différentes configurations examinées, relativement simples il est vrai, il a été possible d'obtenir des estimations correctes, c'est-à-dire des estimations permettant de simuler les largeurs de la zone inondée avec une précision inférieure à 1 % dans le cas d'écoulements complètement débordants.

En ce qui concerne les méthodes d'assimilation proprement dites, le filtre de Kalman étendu présente l'inconvénient de ne pas toujours converger. Par ailleurs, il fournit des résultats dans l'ensemble moins bons que ceux de la minimisation d'une fonction coût. Pour ces différentes raisons, seule la minimisation d'une fonction coût a été mise en oeuvre dans le cas d'un écoulement monodimensionnel non permanent.

Les trois expressions de fonction coût employées sont basées sur le critère de [Nash & Sutcliffe \(1970\)](#) :

- Φ_1 est la somme des carrés des erreurs entre grandeurs simulées et grandeurs observées, exprimée en mètre carré,
- Φ_2 est la somme des carrés des erreurs entre grandeurs simulées et grandeurs observées, normée par le carré des grandeurs observées, elle est adimensionnelle,
- Φ_3 est la somme des carrés des erreurs entre grandeurs simulées et grandeurs observées, normée par le carré des grandeurs simulées, elle est également adimensionnelle.

Dans la plupart des cas, ces trois expressions ont fourni des résultats comparables. Utiliser, pour ces différentes fonctionnelles, un algorithme de minimisation basé sur une méthode de recherche dite "locale" présente l'inconvénient d'aboutir à un minimum local, et non global. Or, le modèle hydrodynamique étant fortement non linéaire, les fonctions coûts possèdent très vraisemblablement plusieurs minima locaux, dans lesquels la procédure de minimisation est susceptible de rester bloquée. Comme le montre la figure (4.6), un changement d'initialisation de l'algorithme peut permettre de résoudre ce problème, il est néanmoins nécessaire de garder à l'esprit qu'il s'agit d'un inconvénient de la méthode. Il existe des algorithmes de recherche des minima glo-

baux, comme le recuit simulé¹ par exemple, mais ils présentent souvent d'importantes difficultés de mise en oeuvre et peuvent s'avérer très coûteux en temps de calcul, en fonction des dimensions de l'espace des paramètres. Ils ne sont donc pas pris en considération dans cette étude, ils constituent cependant une alternative qui pourrait faire l'objet d'une analyse intéressante.

A la lumière de ce bilan, il s'agit d'élaborer une méthodologie d'estimation de paramètres, destinée à être mise en pratique sur des sites d'étude. Partant des faits suivants :

- le filtre de Kalman étendu ne converge pas toujours,
- les trois expressions de fonction coût testées fournissent, en général, des performances analogues,
- Φ_1 est l'expression la plus simple, et également celle qui a toujours fourni de bons résultats,

il semble que la méthode à tester en premier lieu sur un cas réel soit la minimisation de la fonction coût Φ_1 , c'est-à-dire la méthode des moindres carrés classique, avec un critère d'erreur quadratique. C'est donc celle qui va être à présent appliquée aux sites d'étude.

¹La méthode du recuit simulé est une récente technique d'optimisation dérivée de la méthode de Monte-Carlo. Elle tire son nom d'une analogie avec le procédé du recuit, employé par les métallurgistes pour refroidir une pièce, de manière à la faire évoluer vers un état qui minimise son énergie interne. Partant d'un point donné P de l'espace des paramètres, de coût C , un nouveau point P' , de coût C' , est généré de manière aléatoire. Cette modification est appelée un "mouvement". La nouvelle configuration est acceptée ou refusée, en accord avec un critère de probabilité basé sur la fonction de Boltzmann $\exp\left(\frac{-\Delta C}{T_{sa}}\right)$. ΔC représente la variation de coût entre les deux points P et P' , T_{sa} , appelée "pseudo-température" ou "température recuite" gère la probabilité d'acceptation du mouvement. Ce critère d'acceptation probabiliste autorise certains mouvements dégradant le critère (c'est-à-dire augmentant la valeur de la fonction coût), permettant ainsi à l'algorithme de "s'échapper" des éventuels optima locaux. Le choix du schéma de décroissance de la pseudo-température T_{sa} fait partie des difficultés majeures liées à l'implantation de cet algorithme.

Troisième partie

Application aux sites d'étude

Chapitre 6

Sites d'étude et données recueillies

Sommaire

6.1	L'Aisne	132
6.1.1	Description du site	132
6.1.2	Données disponibles	134
6.2	La Lèze	136
6.2.1	Description du site	136
6.2.2	Données disponibles	138
6.3	Synthèse des données recueillies	141

Ce chapitre décrit les deux sites d'étude et fait la synthèse des données recueillies pour chaque site.

La méthodologie d'estimation de paramètres, précédemment testée au moyen d'expériences jumelles, a été mise en oeuvre sur deux sites d'étude : la basse vallée de l'Aisne et la vallée de la Lèze (Fig. 6.1).

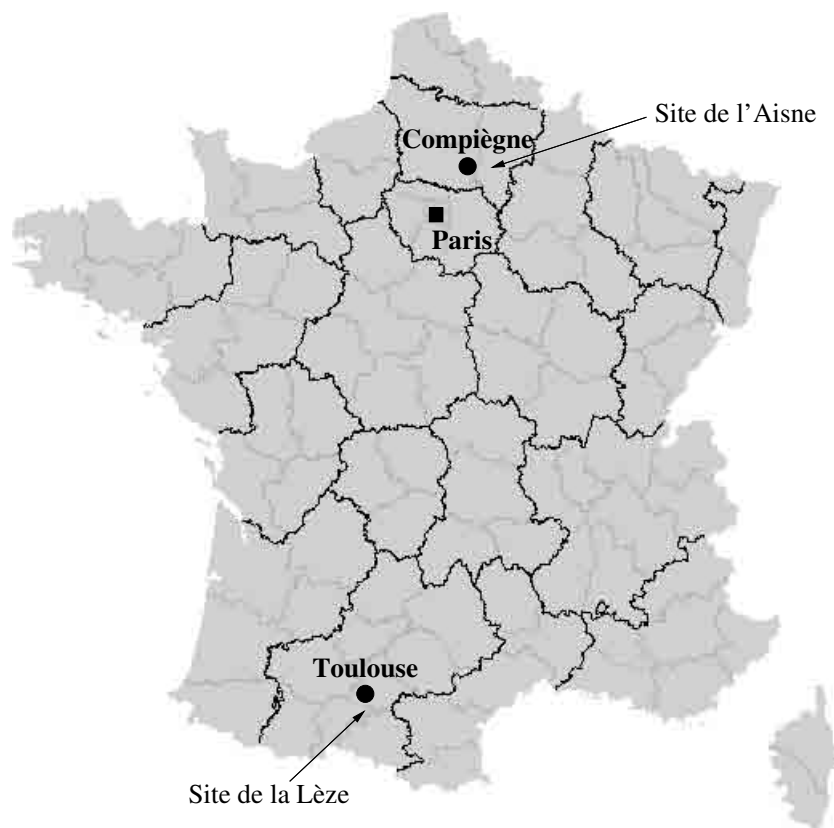


FIG. 6.1 – Les deux sites d'étude

6.1 L'Aisne

L'Aisne est une rivière du nord de la France, longue de 266 km et d'un débit moyen de $63 m^3.s^{-1}$. Elle prend sa source dans le massif de l'Argonne, à la limite entre le département de la Meuse et celui de la Marne, et se jette dans l'Oise à Compiègne, dans le département de l'Oise (Fig. 6.2).

6.1.1 Description du site

La zone d'étude représente un linéaire de rivière d'environ 5 km situé à l'amont de la ville de Vic-sur-Aisne (Fig. 6.2), il n'y a pas d'affluent sur ce tronçon. A l'origine, la zone couverte par les photos aériennes d'inondation représentait un linéaire de 14 km , une partie seulement a été retenue afin de s'affranchir des problèmes de singularités (écluses, ponts, îlots...) qui ne sont pas l'objet de cette étude. Sur ce secteur, la largeur du lit majeur est comprise entre 200 m et 1 km , la pente moyenne longitudinale est légèrement inférieure à 0.02 %. Les obstacles linéaires à l'écoulement sont peu nombreux en lit majeur, par conséquent ce site est bien adapté à une modélisation monodimensionnelle de l'écoulement. Par ailleurs, la dynamique de crue étant très lente et le tronçon considéré relativement court, l'hypothèse d'un écoulement permanent reste raisonnable.

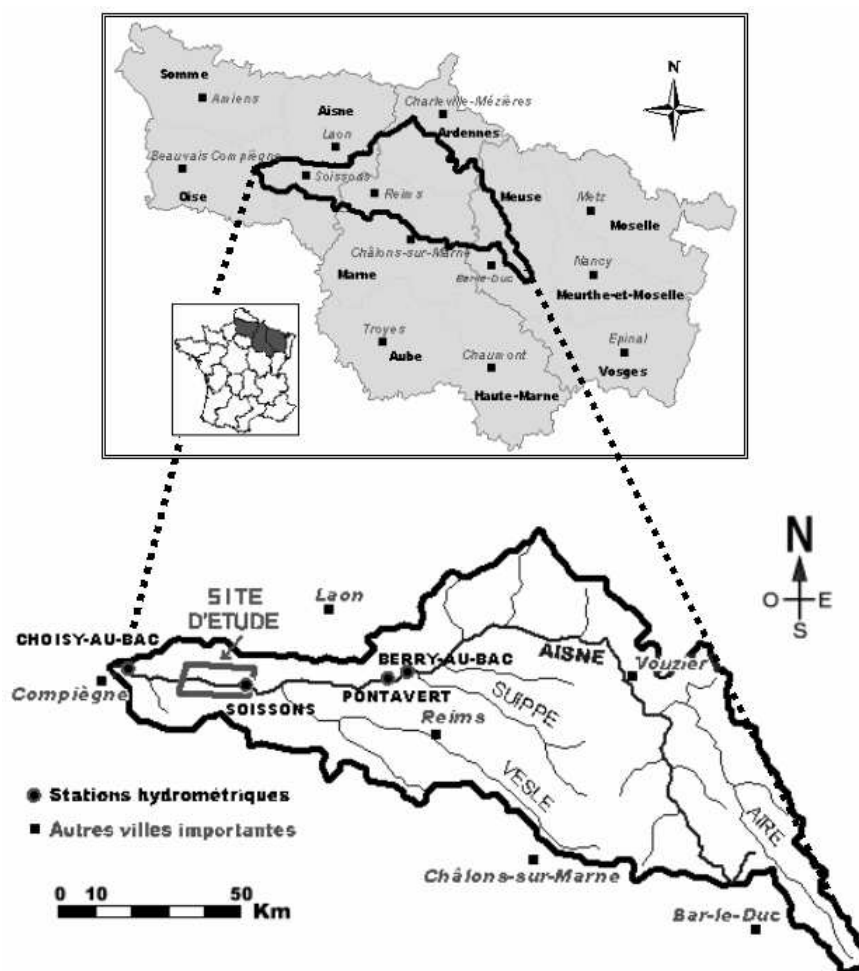


FIG. 6.2 – Bassin versant de l'Aisne et site d'étude, d'après [Raclet \(2003a\)](#)

6.1.2 Données disponibles

La crue étudiée a eu lieu en décembre 1993 : le débit de la rivière a dépassé $450 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ dans la nuit du 27 au 28 décembre 1993 à Choisy-au-bac (Tab. 6.1), qui est située au niveau de la confluence entre l'Aisne et l'Oise, environ 20 km à l'aval de la zone d'étude. La période de retour estimée sur le site d'étude est de l'ordre de 30 à 40 ans (Raclot, 2003a).

	Soissons	Choisy-au-bac
Débit	-	$Q^o \geq 450 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
Cote d'eau	$Z^o \cong 42.22 \text{ m}$	$Z^o \cong 39 \text{ m}$
Cote du fond du lit	$Z_f^o \cong 36.92 \text{ m}$	-

TAB. 6.1 – Informations sur les caractéristiques hydrauliques de la crue de décembre 1993

27 photographies obliques couleur ont été réalisées très peu de temps avant le maximum de crue (Fig. 6.3 b). Des photos verticales noir et blanc au 1/10 000, prises 5 jours après le passage de la crue, étaient également disponibles (Fig. 6.3 a). Ces photos ont été traitées par Raclot (2003a) dans le cadre de sa thèse, afin d'extraire la largeur de la zone inondée. Des données topographiques étaient également disponibles sur la zone d'étude. L'ensemble des informations recueillies sur ce site est récapitulé dans le tableau (6.2). La figure (6.4) montre l'extension de la crue extraite des photographies obliques, ainsi que la topographie disponible. Pour le site de l'Aisne, comme pour celui de la Lèze, l'axe de l'écoulement a été choisi comme axe de référence pour l'extension de la zone inondée.

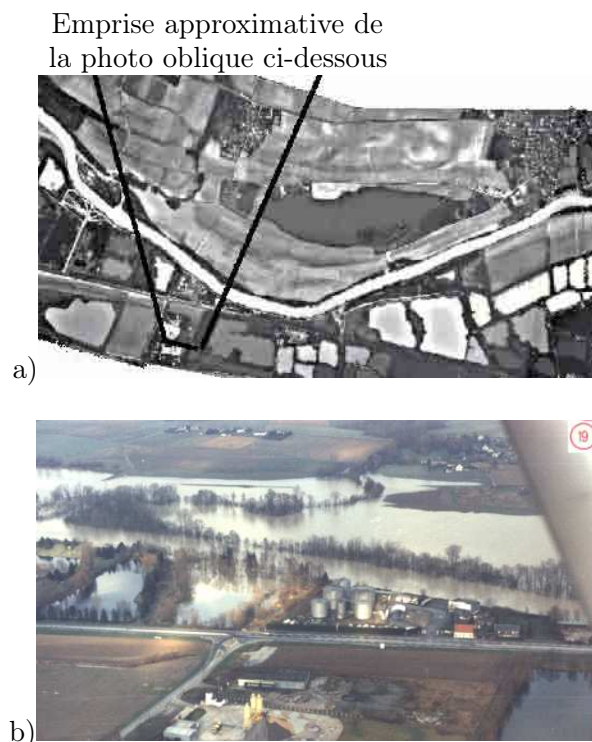


FIG. 6.3 – a) Photo aérienne verticale du site d'étude, b) Exemple de photographie prise pendant la crue de décembre 1993 (Raclot *et al.*, 2000)

Type de données	Format d'acquisition	Date de réalisation	Créateur
Photos aériennes obliques	Photos papier couleur	26/12/1993 entre 13h et 15h	Cabinet Houdry pour service de navigation
Photos aériennes verticales	Photos papier au 1/10 000	31/12/1993 à 13h	IGN, pour Cetmef Compiègne
Semis de points cotés	Plan SIG	-	Photogrammétrie, pour Cetmef Compiègne

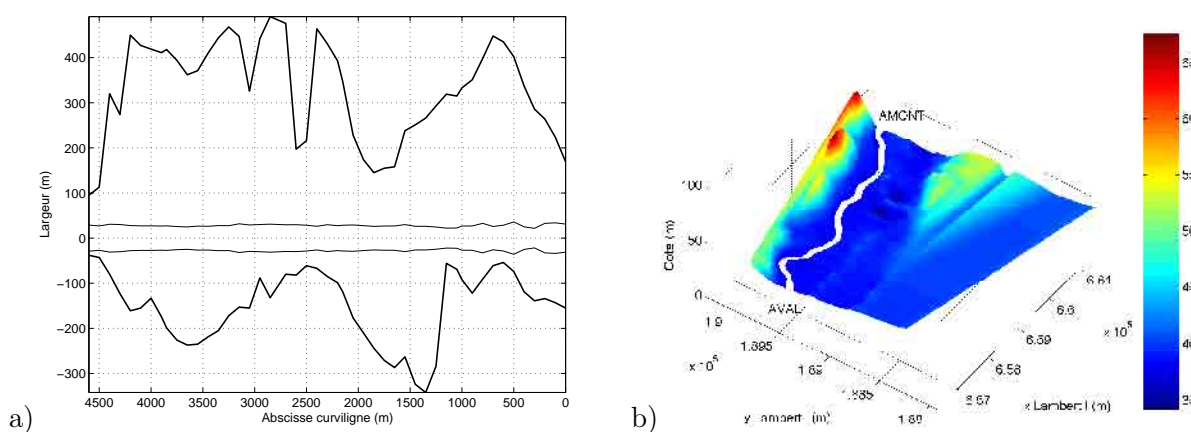
TAB. 6.2 – Liste des données recueillies sur le site de l'Aisne, d'après [Raclot \(2003a\)](#)

FIG. 6.4 – a) Extension : — du lit mineur, — de la crue de décembre 1993, b) Topographie du lit majeur

6.2 La Lèze

6.2.1 Description du site

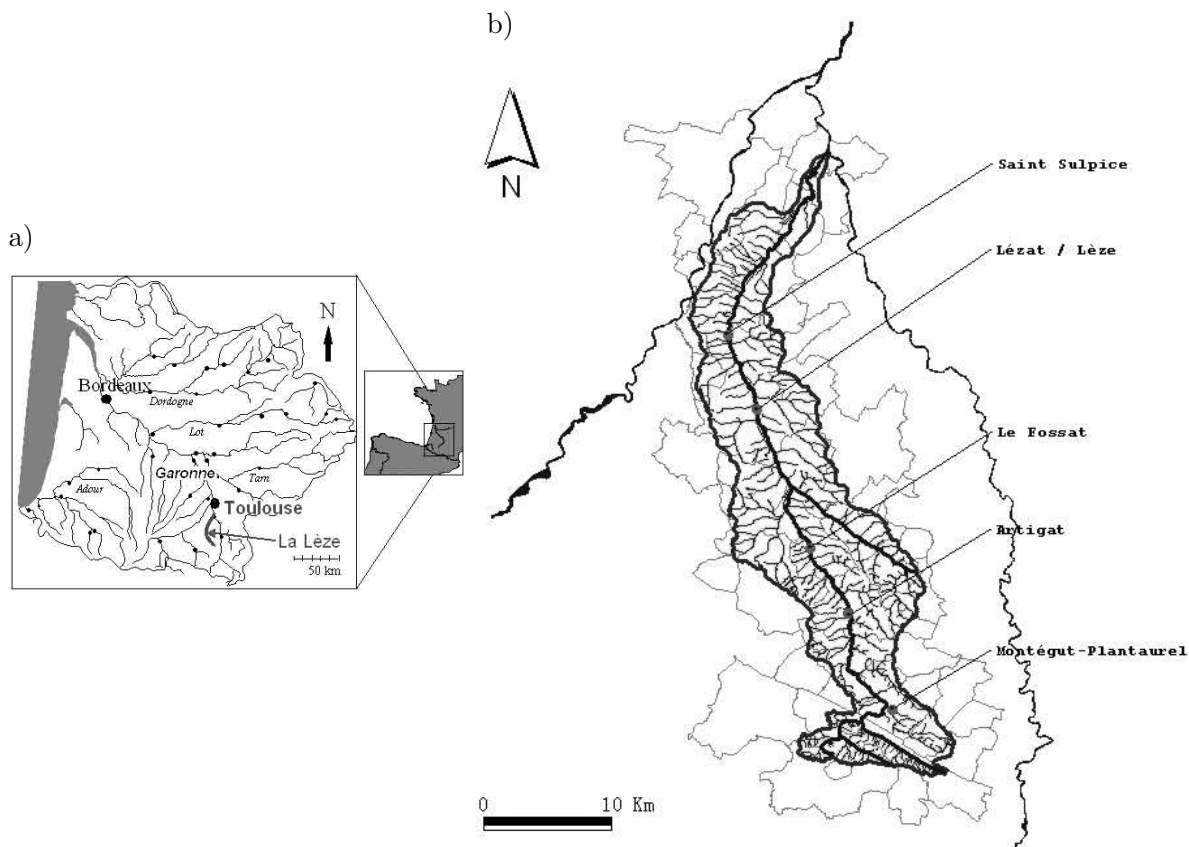


FIG. 6.5 – a) Localisation et b) détail du bassin versant de la Lèze, d'après Stream Reach Management : An Expert System <http://www.streames.org/sites/lezat.htm>

La Lèze est un affluent de l'Ariège long de 52 km. Elle prend sa source dans les Pyrénées à une altitude de 600 m et traverse les départements de l'Ariège et de la Haute-Garonne. La confluence avec l'Ariège se fait au lieu-dit Labarthe (Fig. 6.5). Le bassin versant étant assez étroit, les montées de crue sont relativement rapides, contrairement à l'Aisne.

Trois zones exemptes de singularités ont été étudiées (Fig. 6.6), les caractéristiques de ces zones sont récapitulées dans le tableau (6.3).

Zone	Situation	Longueur	Affluent
Zone 1	Amont de St-Sulpice-sur-Lèze	4 km	la Criquonne (Ruisseau)
Zone 2	Amont de Beaumont-sur-Lèze	5 km	Ruisseau Claret
Zone 3	Aval de Lagardelle-sur-Lèze	2.5 km	Ruisseau du Pradallot

TAB. 6.3 – Caractéristiques des zones d'étude (site de la Lèze)

Sur tout son linéaire, le lit mineur de la Lèze présente un gabarit assez homogène, résultant sans doute des recalibrages de la fin des années 70. Il s'insère dans un lit majeur large, assez rectiligne, dont les limites hydrogéomorphologiques sont bien marquées jusqu'à Lagardelle-sur-Lèze. Il existe une différence de relief entre les deux rives : la rive droite présente une pente

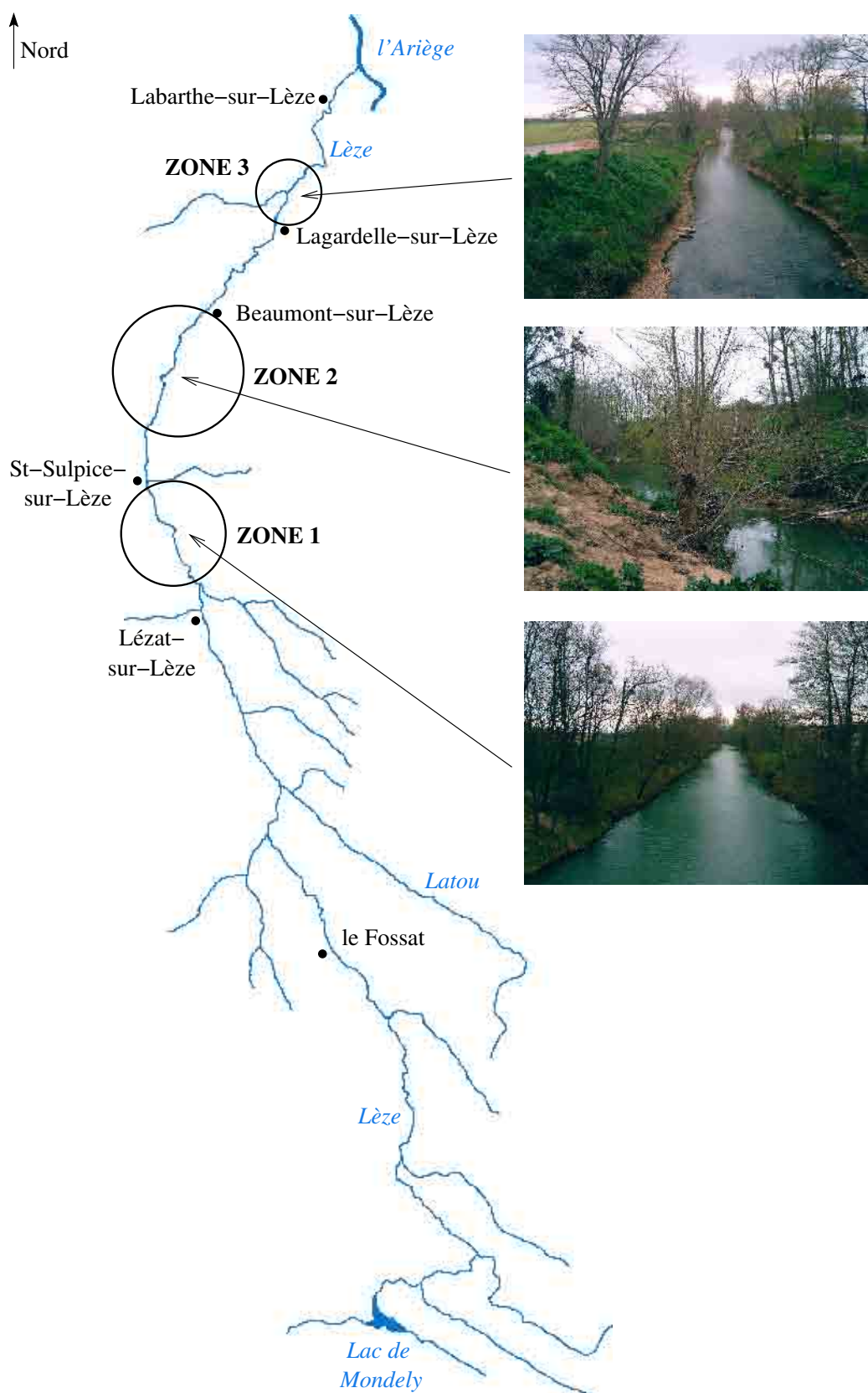


FIG. 6.6 – Zones d'étude sur le site de la Lèze

moyenne plus importante que la rive gauche. Outre les cordons de digues présents en bord de lit mineur ou en travers du lit majeur, la Lèze présente un cloisonnement d'origine anthropique (zones urbaines, infrastructures linéaires, ...) espacé mais bien régulier. En aval de Lagardelle-sur-Lèze, la vallée s'élargit fortement et ses limites morphologiques deviennent moins franches ; elles se confondent avec celles de petits cours d'eau, comme le ruisseau de l'Ayguère, ayant pour résultante une zone inondable extrêmement étendue où les hauteurs d'eau sont assez limitées.

6.2.2 Données disponibles

Quatre événements étaient disponibles sur le site de la Lèze (Fig. 6.7) : deux crues réelles ayant eu lieu l'une en 1977, l'autre en juin 2000 et deux crues dont l'extension a été déterminée par géomorphologie, de temps de retour respectifs 15 ans et supérieur à 100 ans (crue exceptionnelle). Cette même approche hydrogéomorphologique permet de délimiter la largeur du lit mineur. Ces données ont été fournies par la DIREN Midi-Pyrénées (2001).

La figure (6.7) montre bien que les extensions des différentes crues en rive droite et rive gauche sont relativement complexes. Pour prendre un exemple, la zone inondée lors de la crue exceptionnelle n'est pas toujours la plus importante : les courbes représentant les largeurs pour chaque événement s'entrecroisent, ce qui traduit la complexité des phénomènes mis en jeu.

Définition de l'approche hydrogéomorphologique Elle correspond à

une première phase d'analyse des milieux naturels et anthropisés des vallées. Elle est basée sur une approche naturaliste, qui vise à mettre en évidence les différents lits des cours d'eau, les diverses implantations susceptibles de perturber les écoulements, en les accélérant ou en les ralentissant, et à en déduire les zones inondables ainsi que des valeurs approchées des paramètres physiques de l'inondation (METL/MATE, 1996) in (Raclet, 2003a).

L'analyse géographique, associée à la connaissance des crues passées et de leur dynamique, permet de délimiter au sein de la vallée les zones qui sont soumises à des crues fréquentes, rares ou celles qui ne sont jamais inondées. Ces unités hydrogéomorphologiques correspondent donc chacune à une gamme de crue (Fig. 6.8) :

- le lit mineur est le lit des crues très fréquentes, il est emprunté par la crue annuelle, dite crue de plein-bord,
- le lit moyen est fonctionnel pour les crues fréquentes (de période de retour de 2 à 10 ans),
- le lit majeur n'est actif que pour les crues rares à exceptionnelles.

L'analyse hydrogéomorphologique se pratique sur le terrain et par photo-interprétation, le résultat de la caractérisation est ensuite cartographié au 1/25 000 et au 1/10 000 dans les secteurs à gros enjeux. L'interprétation de cette carte hydrogéomorphologique permet de fournir une description spatialisée de l'aléa avec un niveau de précision très variable, allant du qualitatif, si la classification des différentes unités hydrogéomorphologiques n'est pas complétée par des données hydrologiques, au quantitatif, si des résultats issus de modélisation hydraulique sont introduits.

En ce qui concerne les crues de la Lèze, la méthode cartographique adoptée a été élaborée par le laboratoire d'hydrologie continentale de l'Université de Toulouse-le-Mirail, sous la direction scientifique du professeur Roger LAMBERT. L'ensemble des données disponibles a été exploité :

- informations hydrologiques (niveaux et périodicité des crues),
- études antérieures (hydrauliques, ou préalables des documents réglementaires),
- archives historiques et administratives,
- données de terrains : photos aériennes, repères de crues, occupation traditionnelle des sols, géomorphologie (dépôts et érosions, chenaux préférentiels de circulation des eaux, digues, obstacles à l'écoulement des crues).

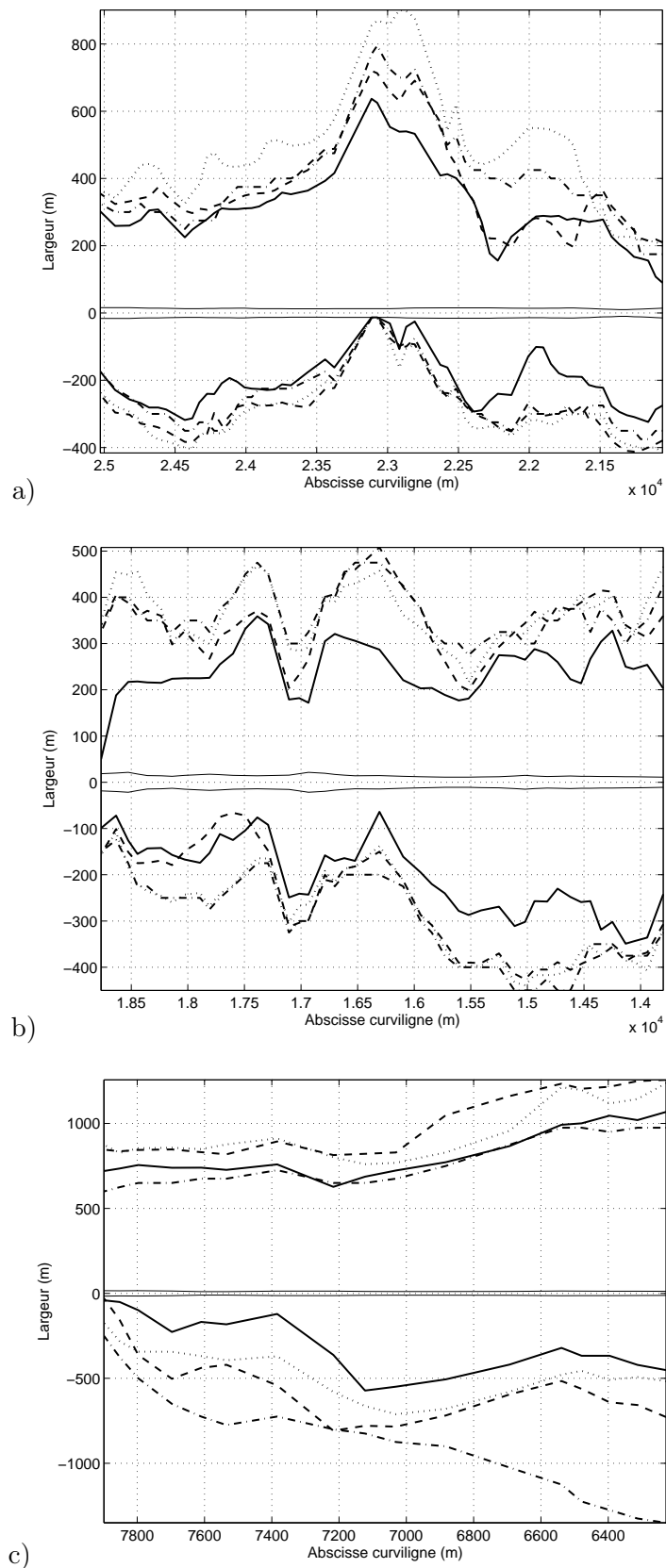


FIG. 6.7 – Extension des crues répertoriées : — largeur du lit mineur, — crue de temps de retour 15 ans, ... crue exceptionnelle, -.- crue de 1977, -- crue de Juin 2000, a) Zone 1 (St-Sulpice-sur-Lèze), b) Zone 2 (Beaumont-sur-Lèze), c) Zone 3 (Lagardelle-sur-Lèze)

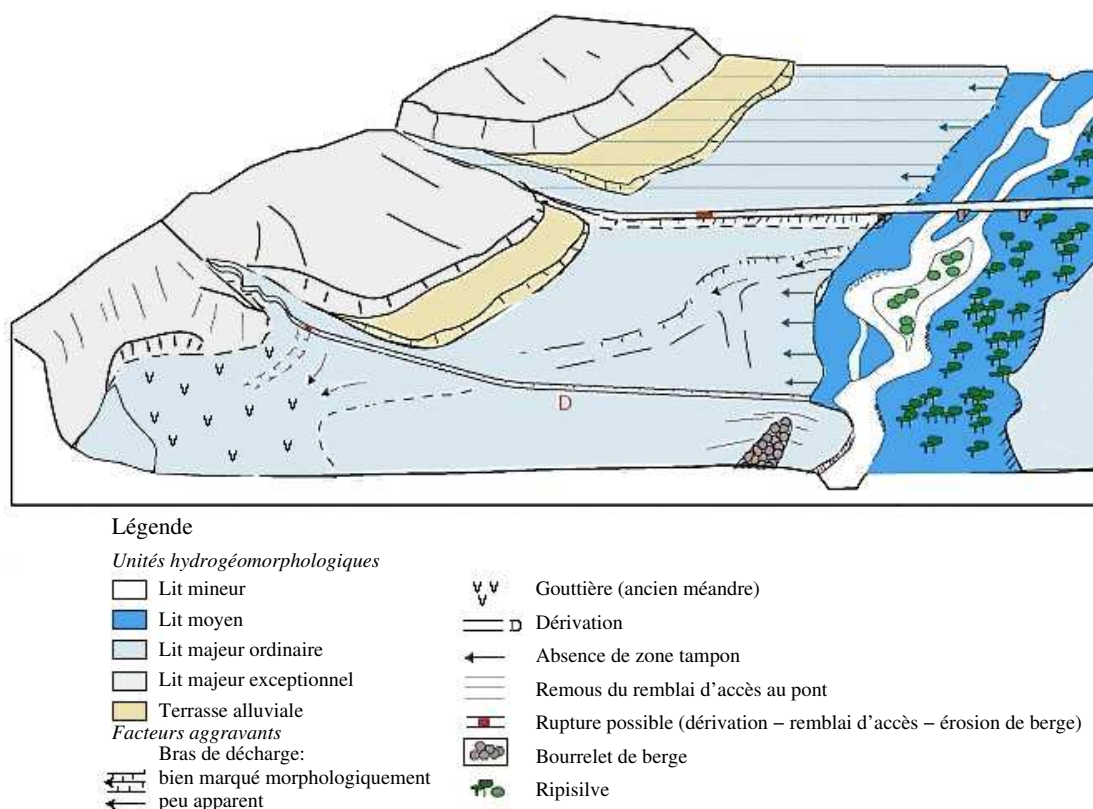


FIG. 6.8 – Exemple de caractérisation hydrogéomorphologique, d'après la DIREN Languedoc - Roussillon

www.languedoc-roussillon.environnement.gouv.fr/risques/zi/aude/methodologie.htm

L'échelle retenue pour l'étude est celle du 1/25 000, la précision ne descend pas en-dessous de 25 m. Une autre limitation de l'analyse est le type d'inondation envisagé : seul le débordement du cours d'eau a été pris en compte. N'ont pas été cartographiées les inondations par remontée de nappe ou celles dues au ruissellement pluvial urbain.

Les seules informations disponibles sur les caractéristiques hydrauliques des crues synthétiques sont récapitulées dans le tableau (6.4). Les débits ont été déterminés par différentes méthodes statistiques à partir de mesures réalisées sur la période de 1981 à 1995 (DIREN Midi-Pyrénées, 2001). Le tableau (6.5) liste les informations sur la crue de 1977 et celle de juin 2000. Compte tenu de la topographie de la Lèze en aval du village de Labarthe, les mesures concernant la crue de juin 2000 sont à considérer avec précaution : une partie du débit total se déverse dans de petits cours d'eau adjacents et n'est donc pas pris en compte par la station de mesure. La zone inondée est alors extrêmement étendue et les hauteurs d'eau sont assez limitées (3 m seulement à Labarthe pour la crue de juin 2000, tab. 6.5)

		Lézat-sur-Lèze	Labarthe-sur-Lèze
Crue de temps de retour 10 ans	Débit	$Q_{10} \cong 80 \text{ m}^3.s^{-1}$	$Q_{10} \cong 115 \text{ m}^3.s^{-1}$
	Hauteur d'eau	$H_{10} \cong 6.4 \text{ m}$	$H_{10} \cong 2.4 \text{ m}$
Crue de temps de retour 100 ans	Débit	$Q_{100} \cong 125 \text{ m}^3.s^{-1}$	$Q_{100} \cong 150 \text{ m}^3.s^{-1}$
	Hauteur d'eau	$H_{100} \cong 8.0 \text{ m}$	$H_{100} \cong 3.2 \text{ m}$

TAB. 6.4 – Informations sur les caractéristiques hydrauliques des crues synthétiques, stations de Lézat-sur-Lèze et Labarthe-sur-Lèze

		Lézat-sur-Lèze	Labarthe-sur-Lèze
Crue de 1977	Débit	$Q_{1977}^o \cong 75.5 \text{ m}^3.s^{-1}$	$Q_{1977}^o \cong 98.5 \text{ m}^3.s^{-1}$
Crue de juin 2000	Débit	$Q_{2000}^o \cong 86 \text{ m}^3.s^{-1}$	$Q_{2000}^o \cong 144 \text{ m}^3.s^{-1}$
	Cote d'eau	$Z_{2000}^o \cong 207 \text{ m}$	$Z_{2000}^o \cong 160 \text{ m}$
	Cote du fond du lit	$Z_{fond}^o \cong 199 \text{ m}$	$Z_{fond}^o \cong 157 \text{ m}$

TAB. 6.5 – Informations sur les caractéristiques hydrauliques des crues de 1977 et de juin 2000, stations de Lézat-sur-Lèze et Labarthe-sur-Lèze

Finalement, des profils en travers de la rivière, issus de mesures in situ effectuées par un géomètre, étaient également disponibles. Cependant, ces profils ne couvrent pas la totalité du lit majeur : leur largeur ne dépasse pas 80 m, alors que l'extension de la zone inondée peut aller jusqu'à 2 km dans la zone 3 (Lagardelle-sur-Lèze). Néanmoins, ces mesures réalisées par un géomètre ont permis de calculer la pente du fond du lit tout le long du cours d'eau.

6.3 Synthèse des données recueillies

En raison de la diversité des données disponibles dans chaque cas (Tab. 6.6), les deux sites étudiés vont permettre de développer des approches différentes. Sur le site de l'Aisne, un seul événement est disponible, ce qui rend difficile une quelconque validation des résultats obtenus. En revanche, quatre crues sont répertoriées sur le site de la Lèze, ce qui va permettre de tester la portabilité des paramètres reconstitués d'une crue à une autre. La topographie du lit majeur de l'Aisne va pouvoir être introduite dans le processus d'assimilation de données, afin

d'examiner le parti qu'il est possible de tirer de cette information supplémentaire. Dans tous les cas, les extensions de crue disponibles seront considérées comme étant les extensions maximales, correspondant à l'apogée de la crue.

	Site 1 : l'Aisne	Site 2 : la Lèze
Milieu concerné	Principalement rural	Principalement rural
Nombre de crues étudiées	1	4
Largeur du lit mineur	oui	oui
Topographie du lit majeur	oui	non
Profils en travers	non	oui
Pente du fond du lit	non	oui

TAB. 6.6 – Synthèse des données recueillies pour chaque site

Les chapitres suivants présentent l'application de la méthodologie, précédemment testée à l'aide de données fictives, sur les deux sites d'étude considérés. Les approches testées mettent bien en évidence les difficultés rencontrées dans un cas "réel" et la nécessité d'adapter la méthode issue des résultats des expériences jumelles.

Chapitre 7

Estimation de paramètres sur le site de l'Aisne

Sommaire

7.1	Introduction	144
7.2	Reconstitution d'une géométrie équivalente	145
7.2.1	Méthodologie	145
7.2.2	Résultats obtenus	147
7.2.3	Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur les grandeurs simulées	150
7.3	Utilisation de la topographie du lit majeur	154
7.4	Conclusions sur le site de l'Aisne	159

Différentes approches ont été expérimentées sur le site de l'Aisne, afin de tirer parti de toutes les données disponibles. Ce chapitre décrit les démarches d'estimation de paramètres entreprises sur ce site et détaille les résultats obtenus.

7.1 Introduction

La modélisation retenue est celle d'un écoulement monodimensionnel, en régime permanent. Il n'y a pas d'affluents ni de ramifications sur le tronçon de l'Aisne considéré, et donc pas de débit d'apport ou de fuite : $q_L = 0$. Le modèle (1.24, 1.25), présenté au chapitre 1, se réduit alors à :

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad (7.2)$$

avec $Fr^2 = \frac{Q^2 B}{g S^3}$. Les écoulements étudiés sont infracritiques ($Fr < 1$). Le système d'équations différentielles (7.1, 7.2) est résolu par la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4. Le coefficient de Strickler composite, fonction de la hauteur d'eau H , est calculé à partir de la formule d'Einstein :

$$K_s(H) = \left(\frac{P_w}{\sum_i \frac{P_{w_i}}{K_{s_i}^{3/2}}} \right)^{2/3} \quad (7.3)$$

P_w est le périmètre mouillé total, P_{w_i} le périmètre mouillé de la sous-section i , K_{s_i} le coefficient de Strickler de la sous-section i et i l'indice de sommation sur les différentes sous-sections.

Ce type de modélisation (écoulement monodimensionnel et permanent, formule d'Einstein) est certes réducteur mais le nombre de paramètres nécessaires à sa mise en pratique est nettement inférieur à celui de la modélisation 2D, ce qui facilite la procédure d'assimilation de données. Il semble en effet peu réaliste de se lancer dans une estimation de tous les paramètres pour chaque maille, comme l'exigerait la modélisation bidimensionnelle. De plus, la zone étudiée a été choisie de manière à s'affranchir des éventuelles singularités de la plaine d'inondation, afin de la rendre compatible avec la modélisation 1D. Elle est par ailleurs suffisamment courte ($< 5 \text{ km}$) pour que l'hypothèse d'un écoulement permanent soit raisonnable.

En se basant sur l'ensemble des données disponibles (§ 6.1), deux approches ont été mises en oeuvre sur le site de l'Aisne. Toutes les deux tentent de reconstituer les paramètres suivants :

- un débit Q ($m^3.s^{-1}$),
- une condition à la limite aval du tronçon, car l'écoulement est infracritique, sous forme d'une hauteur d'eau H_{av} (m),
- un coefficient de Strickler du lit mineur $K_{s,min}$ ($m^{1/3}.s^{-1}$),
- un coefficient de Strickler du lit majeur $K_{s,maj}$ ($m^{1/3}.s^{-1}$),
- une pente du fond du lit I ($m.m^{-1}$).

Tous ces paramètres sont supposés invariants le long du tronçon considéré, hypothèse qui paraît raisonnable étant donné le type de propagation de la crue et la morphologie de la partie du cours d'eau étudiée. Les deux démarches testées diffèrent en revanche dans la façon de reconstituer les caractéristiques géométriques des profils en travers. La première approche consiste à faire une hypothèse, simple, sur la forme du profil en travers : lit mineur trapézoïdal et lit majeur de pente uniforme sur chaque rive. Ce sont les caractéristiques géométriques de ce profil équivalent qui sont estimées (§ 7.2). La deuxième approche tient compte de la topographie du lit majeur, qui est connue. Seules les caractéristiques géométriques du lit mineur sont alors recherchées (§ 7.3).

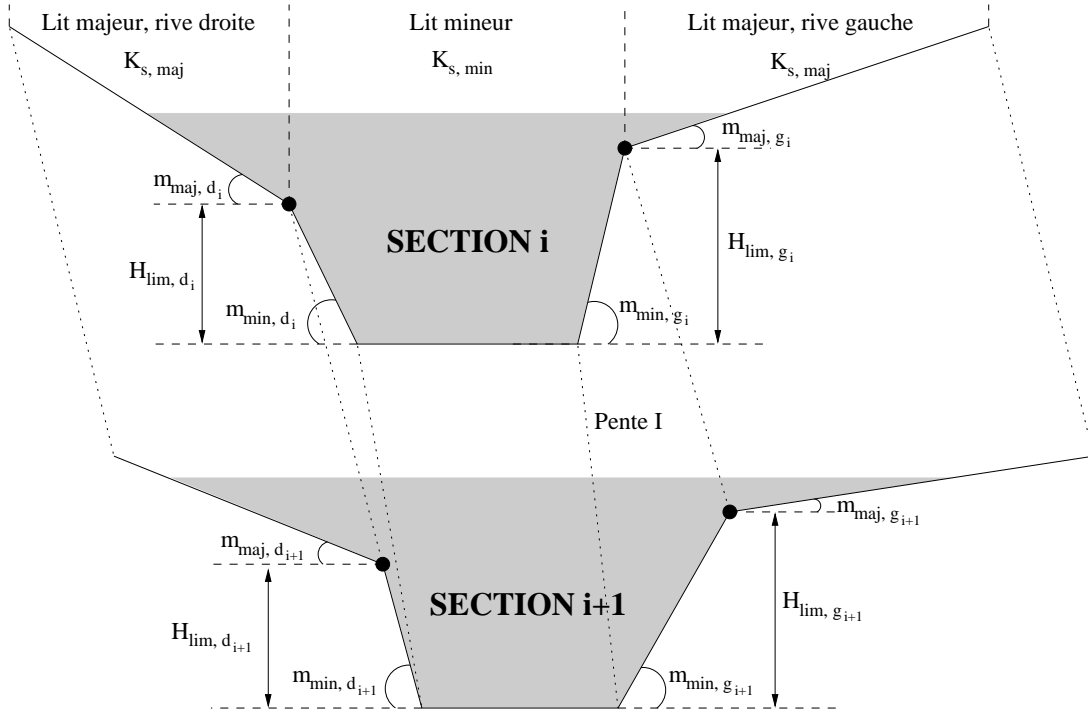


FIG. 7.1 – Géométrie équivalente du profil en travers

7.2 Reconstitution d'une géométrie équivalente

7.2.1 Méthodologie

Outre les paramètres uniformes listés ci-dessus (§ 7.1), cette approche reconstitue la géométrie du cours d'eau en formulant une hypothèse sur la forme du profil en travers (Fig. 7.1), ce sont les caractéristiques de ce profil équivalent qui sont estimées, c'est-à-dire :

- la profondeur du lit mineur en rive gauche $H_{lim, g} (m)$,
- la profondeur du lit mineur en rive droite $H_{lim, d} (m)$,
- la pente transversale du lit mineur en rive gauche $m_{min, g} (m.m^{-1})$,
- la pente transversale du lit mineur en rive droite $m_{min, d} (m.m^{-1})$,
- la pente transversale du lit majeur en rive gauche $m_{maj, g} (m.m^{-1})$,
- la pente transversale du lit majeur en rive droite $m_{maj, d} (m.m^{-1})$.

Ces six paramètres sont reconstitués pour chaque section en travers. Ces dernières sont au nombre de 48 le long du tronçon étudiée, elles sont situées à 50 m ou 100 m l'une de l'autre. En tenant compte des paramètres invariants en x , il y a donc en tout 293 paramètres à estimer. Le tableau (7.1) récapitule l'ensemble des paramètres connus, ainsi que les paramètres à estimer.

Reste à définir à quelle largeur correspond la grandeur jusqu'ici appelée "largeur du lit mineur observée". Dans le cas de l'Aisne, cette dernière est extraite à partir de photos aériennes, prises quelques jours après la crue de décembre 1993 (Fig. 6.3 a). Une hypothèse raisonnable serait de considérer qu'il s'agit de la largeur de la crue de plein bord, c'est-à-dire lorsque l'écoulement est à la limite du débordement en lit majeur. La figure (7.2) illustre ce raisonnement, cette "largeur du lit mineur observée" sera désormais notée B_{pb}^o , pb pour "plein bord". L'axe de l'écoulement divise B_{pb}^o en deux segments d'égale longueur : les largeurs du lit mineur, en rive gauche $B_{pb, g}^o$ et en rive droite $B_{pb, d}^o$. Ces grandeurs connues sont reliées à la largeur du fond du lit B_0 , au moyen des pentes transversales du lit mineur, $m_{min, g}$ et $m_{min, d}$, et de la plus petite profondeur du lit

Paramètres invariants en x	Hydraulique	Débit	Estimé
		Condition aval	Estimée
	Géométrique	Strickler lit mineur	Estimé
		Strickler lit majeur	Estimé
		Pente du fond du lit	Estimée
Paramètres fonction de x	Lit mineur	Largeur du lit, rive gauche	Connue
		Largeur du lit, rive droite	Connue
		Profondeur, rive gauche	Estimée
		Profondeur, rive droite	Estimée
		Pente transversale, rive gauche	Estimée
		Pente transversale, rive droite	Estimée
	Lit majeur	Pente transversale, rive gauche	Estimée
		Pente transversale, rive droite	Estimée

TAB. 7.1 – Récapitulatif des paramètres connus et reconstitués par l’approche “géométrie équivalente”

mineur $H_{lim, inf}$:

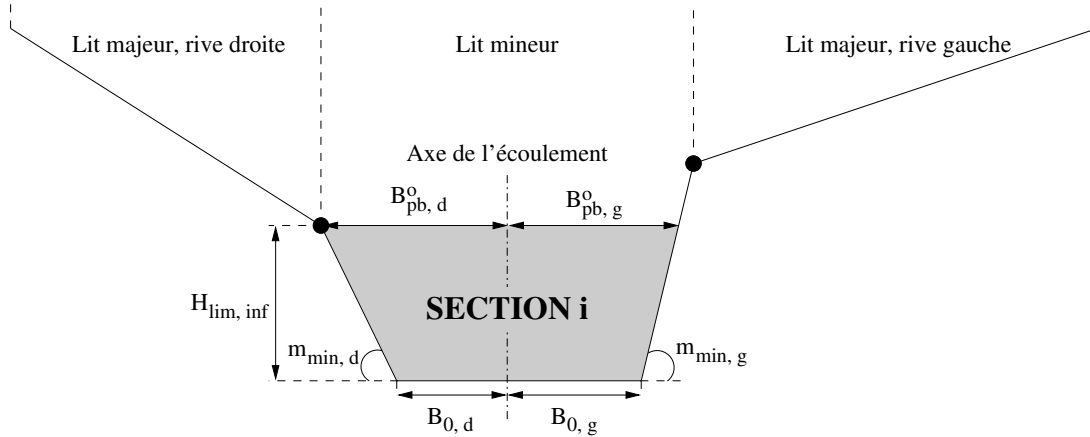
$$B_{0, g} = B_{pb, g}^o - m_{min, g} \times H_{lim, inf} \quad (7.4)$$

$$B_{0, d} = B_{pb, d}^o - m_{min, d} \times H_{lim, inf} \quad (7.5)$$

avec

$$H_{lim, inf} = \text{minimum}(H_{lim, g}, H_{lim, d}) \quad (7.6)$$

B_{pb} étant connue et $m_{min, g}$, $m_{min, d}$, $H_{lim, g}$ et $H_{lim, d}$ estimées, il est possible de calculer B_0 sans avoir à la reconstituer.


 FIG. 7.2 – Calcul de la largeur du fond du lit B_0 à partir de la largeur du lit mineur observée : hypothèse de travail

En accord avec les résultats des expériences jumelles (chapitres 4 et 5), la méthode d’assimilation de données choisie est la minimisation de la fonction coût égale à la somme des carrés des erreurs entre grandeurs observées \mathbf{B}^o et grandeurs simulées \mathbf{B}^s . Afin de tenir compte de

l'asymétrie de l'étendue de la zone inondée (cf. Fig. 6.4 a), et des observations disponibles en rive droite et en rive gauche, l'expression choisie est la somme des carrés des erreurs entre grandeurs observées et grandeurs simulées pour chaque rive :

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^{48} \left\{ \left(\mathbf{B}_d^o|_j - \mathbf{B}_d^s|_j \right)^2 + \left(\mathbf{B}_g^o|_j - \mathbf{B}_g^s|_j \right)^2 \right\} \quad (7.7)$$

j est l'indice spatial de sommation, il varie de 1 à 48, 48 étant le nombre total de sections en travers le long du tronçon étudié. L'indice d indique les grandeurs relatives à la rive droite ; l'indice g , celles relatives à la rive gauche. L'algorithme de minimisation utilisé s'apparente à celui décrit au paragraphe (2.2.2.4). Il s'agit d'un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte. Les informations disponibles sur les caractéristiques hydrauliques de la crue de décembre 1993 (Tab. 6.1), ainsi que sur la morphologie de l'Aisne, ont servi de base au choix des valeurs d'initialisation de l'algorithme de minimisation.

7.2.2 Résultats obtenus

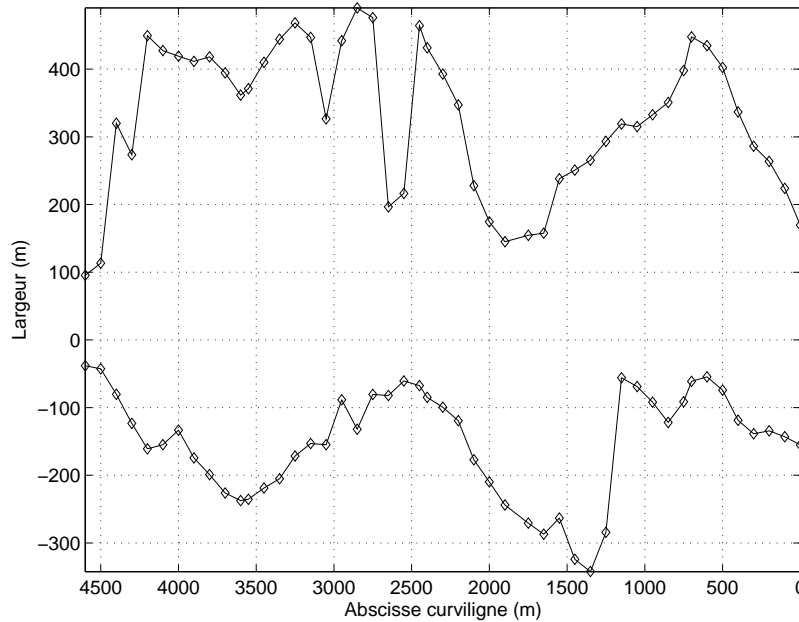


FIG. 7.3 – Comparaison des largeurs au miroir — observée et \diamond optimisée (Vue de dessus)

	Φ_1
Valeur initiale	3.12×10^6
Valeur finale	1.56×10^{-8}

TAB. 7.2 – Valeurs initiale et finale (après assimilation) de la fonction coût Φ_1

La figure (7.3) présente une vue de dessus de l'étendue de la plaine d'inondation comparant les largeurs observées et celles simulées avec les paramètres optimisés. La reconstitution obtenue est très satisfaisante, ainsi que le confirme le tableau (7.2) indiquant les valeurs initiale et finale de la fonction coût. De plus, les valeurs obtenues sont cohérentes avec la morphologie de l'Aisne

et les caractéristiques de la crue de décembre 1993 (Tab. 7.3 et Fig. 7.4). Cependant, les valeurs des paramètres géométriques ont été reconstituées à partir d'un événement unique et a priori rien n'indique qu'elles seront valables pour un autre événement de caractéristiques hydrauliques différentes. De plus, le tableau (7.3) montre bien que le débit Q , les coefficients de Strickler $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$ ne sont pas reconstitués : la valeur optimale obtenue est égale à la valeur choisie comme point de départ de l'algorithme de minimisation. Les valeurs de $m_{min,g}$, $m_{min,d}$, $m_{maj,g}$ et $m_{maj,d}$ ont également très peu varié. Néanmoins, la pertinence de la reconstitution obtenue pourra vraisemblablement être améliorée en introduisant plusieurs jeux d'observations dans le procédé d'assimilation (Werner, 2001).

Paramètre		Valeur initiale	Valeur optimale
Débit	$Q \text{ (m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	457.0	457.0
Condition aval	$H_{av} \text{ (m)}$	6.0	6.5
Strickler lit mineur	$K_{s,min} \text{ (m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	30	30
Strickler lit majeur	$K_{s,maj} \text{ (m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	10	10
Pente du fond du lit	$I \text{ (m} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$	1.0×10^{-7}	8.7×10^{-4}
Géométrie du lit mineur	$H_{lim,g} \text{ (m)}$	5	[2.7; 6.7]
	$H_{lim,d} \text{ (m)}$	5	[3.8; 7.3]
	$m_{min,g} \text{ (m} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$	3	[2.9; 3.0]
	$m_{min,d} \text{ (m} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$	3	[2.9; 3.1]
Géométrie du lit majeur	$m_{maj,g} \text{ (m} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$	100	[99.9; 100.1]
	$m_{maj,d} \text{ (m} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$	100	[99.9; 100.0]

TAB. 7.3 – Initialisation de l'algorithme de minimisation (valeurs initiales) et valeurs optimales des paramètres recherchés

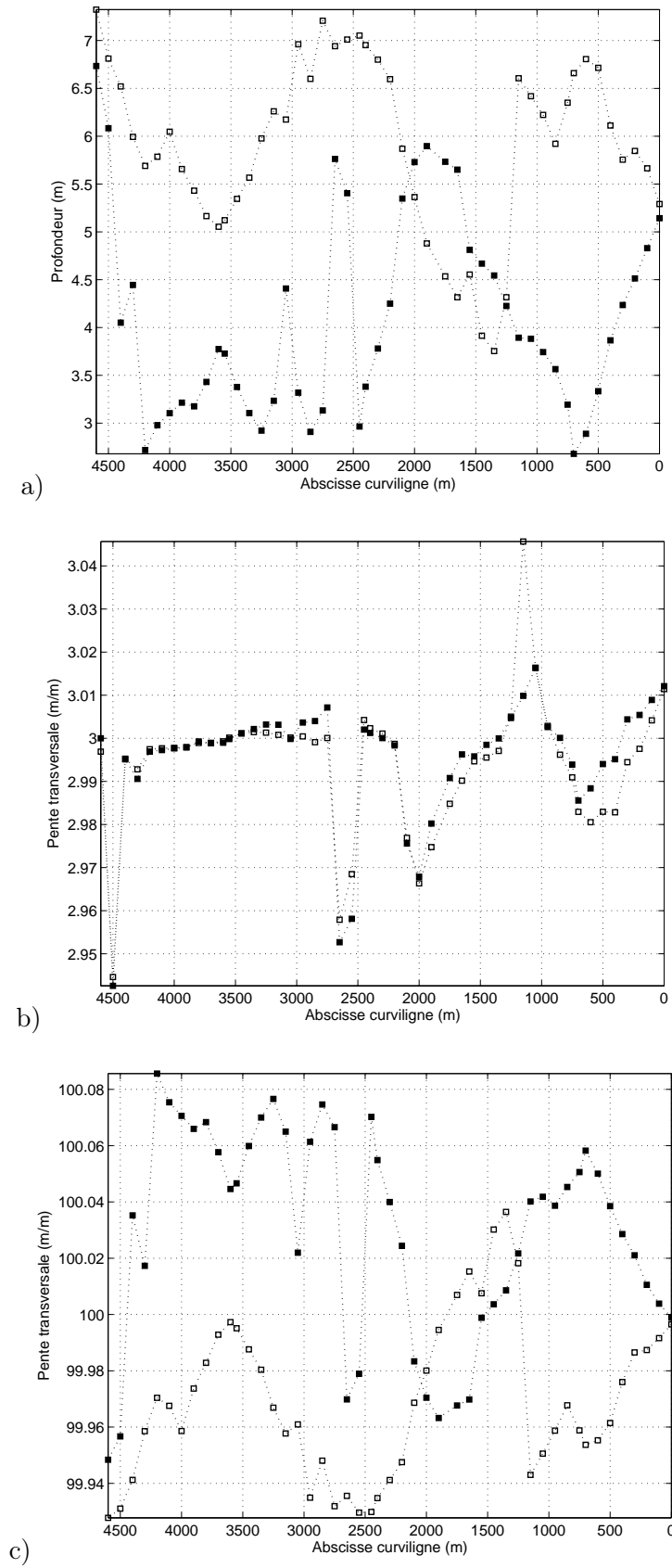


FIG. 7.4 – Valeurs des paramètres estimés, \square rive droite, \blacksquare rive gauche, a) Profondeur du lit mineur, b) Pente transversale du lit mineur, c) Pente transversale du lit majeur

7.2.3 Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur les grandeurs simulées

Les méthodes de l'analyse de sensibilité généralisée (GSA, § 2.3.1) et GLUE (Generalized Likelihood Uncertainty Estimation, § 2.3.2) peuvent permettre :

- d'explorer de façon plus approfondie les propriétés de la reconstitution obtenue,
- d'estimer l'incertitude sur la zone inondée simulée à partir des paramètres optimisés.

Afin de les mettre en oeuvre, il est nécessaire de choisir une mesure de la qualité d'ajustement des observations aux simulations du modèle : la fonction de vraisemblance. Les trois fonctions testées dans la deuxième partie ayant fourni des résultats équivalents, seuls les calculs relatifs à la fonction "efficacité du modèle", \mathcal{L}_e , seront présentés ici :

$$\mathcal{L}_e = 1 - \frac{\Sigma_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right)^2}{\Sigma_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \overline{\mathbf{B}^o} \right)^2}, \quad \Sigma_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right)^2 < \Sigma_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \overline{\mathbf{B}^o} \right)^2 \quad (7.8)$$

Étant donné que le but est d'approfondir l'analyse de l'estimation obtenue, les intervalles de variation des paramètres pour les simulations Monte-Carlo sont centrés sur les valeurs optimales résultant de la minimisation de la fonction coût. Un écart de $\pm 10\%$ autour de ces valeurs a été choisi, le tableau (7.4) donne les valeurs des bornes de ces intervalles pour les paramètres invariants en x , la figure (7.5) illustre, à titre d'exemple, l'intervalle de variation de la profondeur du lit mineur, rive gauche, $H_{lim,g}$.

Paramètre		Valeur optimale	Bornes	
			Inférieure	Supérieure
Débit	$Q \text{ (} m^3.s^{-1} \text{)}$	457.0	411.3	502.7
Condition aval	$H_{av} \text{ (} m \text{)}$	6.5	5.9	7.2
Strickler lit mineur	$K_{s,min} \text{ (} m^{1/3}.s^{-1} \text{)}$	30	27	33
Strickler lit majeur	$K_{s,maj} \text{ (} m^{1/3}.s^{-1} \text{)}$	10	9	11
Pente du fond du lit	$I \text{ (} m.m^{-1} \text{)}$	8.7×10^{-4}	7.8×10^{-4}	9.5×10^{-4}

TAB. 7.4 – Bornes des intervalles de variation, pour les simulations Monte-Carlo, des paramètres invariants en x

La distribution des paramètres à l'intérieur de leurs intervalles de variation respectifs est supposée uniforme et les simulations Monte-Carlo consistent en 10000 tirages aléatoires des 293 paramètres recherchés.

Les 1000 simulations ayant les valeurs de vraisemblance les plus élevées sont choisies comme ayant un comportement correct (*behavioural*). Le seuil qui va séparer les modèles ayant un comportement correct de ceux ayant un comportement incorrect est alors la plus faible valeur de vraisemblance de ces 1000 simulations. Ici, il est égal à :

$$\mathcal{L}_{e_{seuil}} = 0.86 \quad (7.9)$$

Il s'agit d'une vraisemblance relativement importante. Ce seuil étant fixé, il est possible de calculer les densités de probabilité cumulatives de chaque paramètre, ainsi que les statistiques de Kolmogorov, d_{m_c, n_c} (Eq. 2.88), correspondantes (Fig. 7.6 et Tab. 7.5). Les valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, pour $n_c = 1000$ simulations *behavioural* et $m_c = 9000$ simulations *non-behavioural*, sont récapitulées dans le tableau (7.6).

Les résultats obtenus permettent de faire les remarques suivantes, en matière d'analyse de sensibilité du modèle au premier ordre :

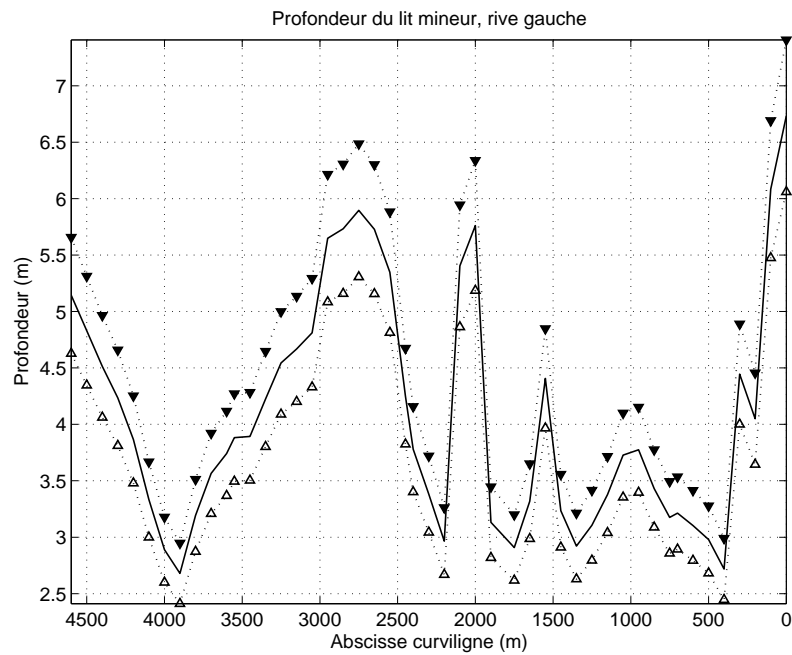


FIG. 7.5 – Profondeur du lit mineur, rive gauche, $H_{lim,g}$: — Valeur optimale et bornes $\cdots\triangle\cdots$ inférieure et $\cdots\nabla\cdots$ supérieure de l'intervalle de variation, pour les simulations Monte-Carlo

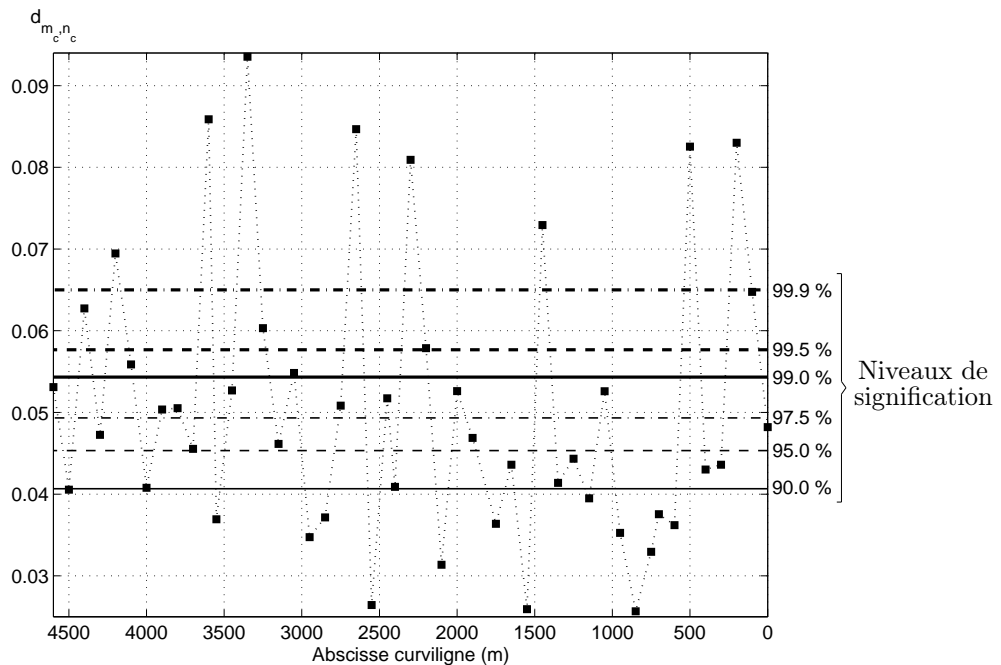


FIG. 7.6 – Exemple de valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo, pour un paramètre fonction de x : \blacksquare profondeur du lit mineur, rive gauche, $H_{lim,g}$, $n_c = 1000$

a)		d_{m_c, n_c}	b)		$\overline{d_{m_c, n_c}}$
	Paramètre	\mathcal{L}_e		Paramètre	\mathcal{L}_e
	Q	0.100		$H_{lim, g}$	0.051
	H_{av}	0.206		$H_{lim, d}$	0.048
	$K_{s, min}$	0.040		$m_{min, g}$	0.046
	$K_{s, maj}$	0.104		$m_{min, d}$	0.042
	I	0.051		$m_{maj, g}$	0.041
				$m_{maj, d}$	0.045

TAB. 7.5 – Valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo, nombre de simulations *behavioural* $n_c = 1000$ pour un total de 10000 simulations, a) pour les paramètres invariants en x , b) pour les paramètres fonction de x : $\overline{d_{m_c, n_c}}$ est la moyenne sur le nombre de sections en travers

Niveau de signification	Risque de première espèce	Valeur critique de d_{m_c, n_c}
90.0 %	0.100	0.041
95.0 %	0.050	0.045
97.5 %	0.025	0.049
99.0 %	0.010	0.054
99.5 %	0.005	0.058
99.9 %	0.001	0.065

TAB. 7.6 – Valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, compte-tenu de la taille des échantillons

- le modèle est très sensible à la condition aval H_{av} , au coefficient de Strickler du lit majeur $K_{s,maj}$ et au débit Q ,
- le modèle est peu sensible au coefficient de Strickler du lit mineur $K_{s,min}$: la valeur correspondant de d_{m_c,n_c} se situe en-dessous du niveau de signification égal à 90 %.

En se basant sur les simulations ayant eu un comportement correct, il est possible de calculer, comme exposé au paragraphe (2.3.2.4), les densités de probabilité cumulatives des grandeurs simulées (c'est-à-dire de l'extension de la zone inondée, en rive droite \mathbf{B}_d^s et en rive gauche \mathbf{B}_g^s), pour chaque section en travers, et d'en déduire les marges d'incertitude sur ces grandeurs simulées, comme l'explique la figure (7.7). La figure (7.8) présente ces marges d'incertitude sur l'extension de la zone inondée, en rive droite et en rive gauche, simulée à partir des paramètres optimisés. Elles correspondent à un écart moyen d'environ $\pm 40m$ en rive droite et en rive gauche. Finalement, une variation relativement faible ($\pm 10\%$) de tous les paramètres par rapport à leur valeur optimale occasionne une marge d'incertitude sur \mathbf{B}_d^s et \mathbf{B}_g^s plutôt importante, et en tous cas bien supérieure à la précision des zones inondées fournies par la télédétection.

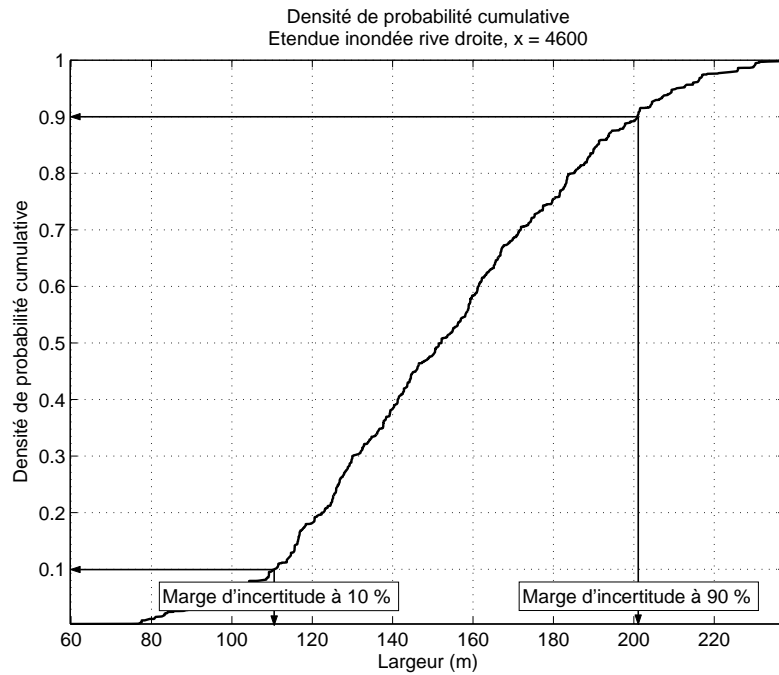


FIG. 7.7 – Illustration du calcul des marges d'incertitude à partir de la densité de probabilité cumulative de la largeur de la zone inondée, simulations *behavioural*

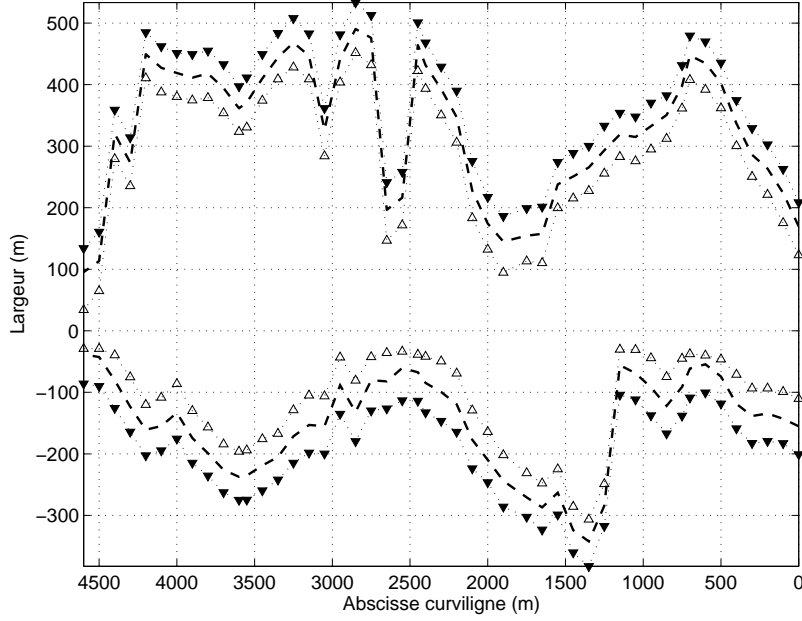


FIG. 7.8 – Marges d’incertitude, \triangle 10 % et \blacktriangledown 90 %, sur $--$ l’extension de la zone inondée simulée à partir des paramètres optimisés

7.3 Utilisation de la topographie du lit majeur

La deuxième approche envisagée consiste à introduire la topographie du lit majeur, également connue (Fig. 6.4 b), dans le processus d’assimilation, afin de ne plus reconstituer que la géométrie du lit mineur (Fig. 7.9). Les paramètres à estimer sont récapitulés dans le tableau (7.7). Étant donné que la géométrie du lit mineur reconstituée doit être rattachée à la topographie connue, au lieu de rechercher la profondeur du lit mineur H_{lim} , c’est la cote du fond, appelée Z_{min} , qui est estimée, pour chaque rive. A noter le traitement particulier de la pente du fond du lit I : lorsque les cotes du fond du lit mineur $Z_{min,g}$ et $Z_{min,d}$ de toutes les sections en travers sont connues, I peut être calculée à partir du point le plus bas dans chaque section, en utilisant la formule suivante (7.10). Il n’est donc pas nécessaire de la reconstituer :

$$I_i = \frac{\text{minimum}(Z_{min,g_{i+1}}, Z_{min,d_{i+1}}) - \text{minimum}(Z_{min,g_i}, Z_{min,d_i})}{x_{i+1} - x_i} \quad (7.10)$$

Les indices i et $i+1$ désignent les sections en travers n° i et $i+1$, d’abscisses curvilignes respectives x_i et x_{i+1} . L’expression minimisée est la même que pour l’approche “reconstitution d’une géométrie équivalente” (§ 7.2) :

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^{48} \left\{ \left(\mathbf{B}_d^o|_j - \mathbf{B}_d^s|_j \right)^2 + \left(\mathbf{B}_g^o|_j - \mathbf{B}_g^s|_j \right)^2 \right\} \quad (7.11)$$

j est l’indice spatial de sommation. Les valeurs ayant servi à initialiser l’algorithme de minimisation, ainsi que les valeurs optimales des paramètres sont listées dans le tableau (7.8).

La figure (7.10) compare les largeurs observées et reconstituées pour chaque rive. La reconstitution est satisfaisante en rive droite, par contre en rive gauche, la largeur reconstituée est en dents de scie, c’est-à-dire nettement inférieure à la largeur observée pour certaines abscisses. L’échelle verticale du graphique a été fortement exagérée pour permettre de voir que chacun de ces pics correspond à un obstacle topographique. En effet, si la rive droite s’élève en pente douce

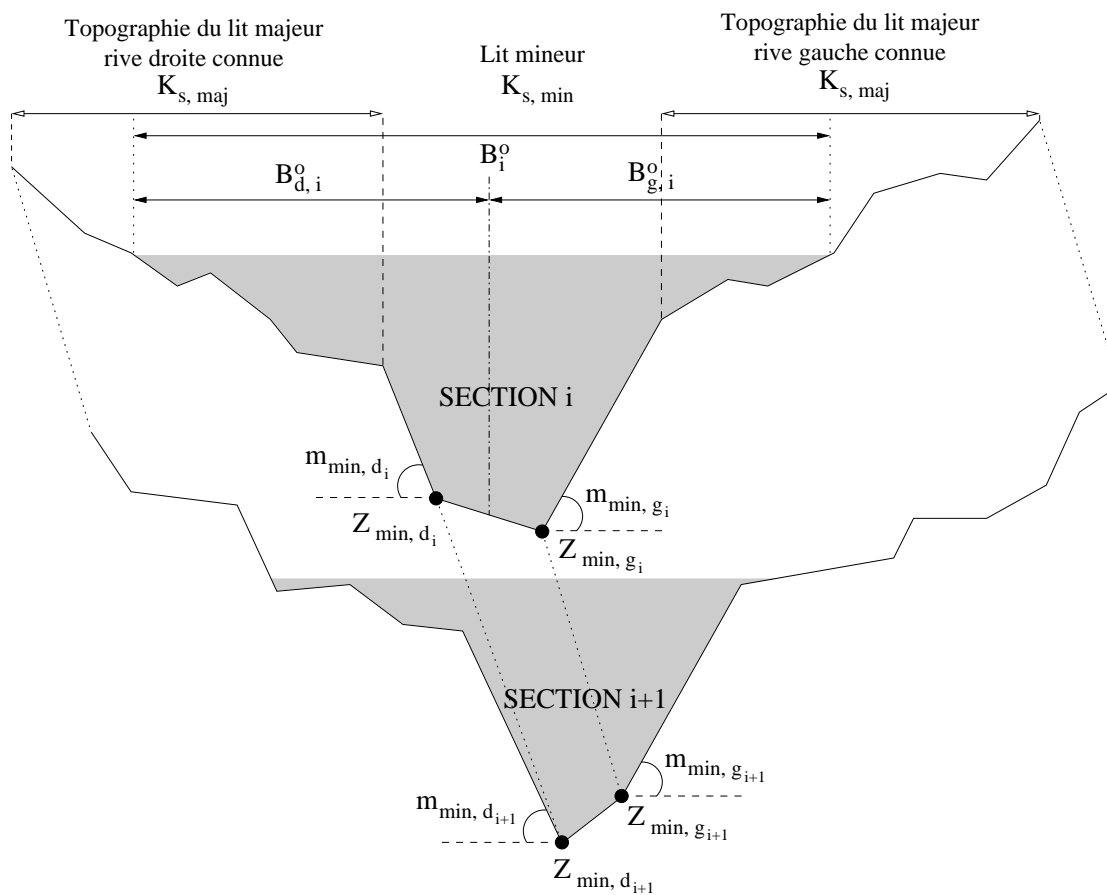


FIG. 7.9 – Reconstitution du lit mineur

Paramètres invariants en x	Hydraulique	Débit	Estimé
		Condition aval	Estimée
	Géométrique	Strickler lit mineur	Estimé
		Strickler lit majeur	Estimé
		Pente du fond du lit	Calculée
Paramètres fonction de x	Lit mineur	Largeur du lit, rive gauche	Connue
		Largeur du lit, rive droite	Connue
		Cote du fond, rive gauche	Estimée
		Cote du fond, rive droite	Estimée
		Pente transversale, rive gauche	Estimée
		Pente transversale, rive droite	Estimée
	Lit majeur	Topographie	Connue

TAB. 7.7 – Récapitulatif des paramètres connus et reconstitués

Paramètre		Valeur initiale	Valeur optimale
Débit	$Q \text{ (m}^3.\text{s}^{-1}\text{)}$	457.0	457.0
Condition aval	$Z_{av} \text{ (m)}$	39	38.5
Strickler lit mineur	$K_{s, \min} \text{ (m}^{1/3}.\text{s}^{-1}\text{)}$	30	30
Strickler lit majeur	$K_{s, \text{maj}} \text{ (m}^{1/3}.\text{s}^{-1}\text{)}$	10	15
Géométrie du lit mineur	$Z_{\min, g} \text{ (m)}$	27	[26.5; 27.0]
	$Z_{\min, d} \text{ (m)}$	27	[26.5; 27.0]
	$m_{\min, g} \text{ (m.m}^{-1}\text{)}$	0	0
	$m_{\min, d} \text{ (m.m}^{-1}\text{)}$	0	0

TAB. 7.8 – Initialisation de l'algorithme de minimisation (valeurs initiales) et valeurs optimales des paramètres recherchés

en s'éloignant du lit mineur, la rive gauche est relativement accidentée. Or, le modèle numérique de simulation de l'écoulement mis en oeuvre ici ne permet pas de contourner les obstacles, il modélise uniquement un écoulement principal s'étendant à partir du lit mineur. L'eau reste donc bloquée derrière les obstacles les plus proches du lit mineur, ce qui crée ces pics dans la reconstitution de la largeur inondée et explique les mauvaises performances de la fonction coût (Tab 7.9).

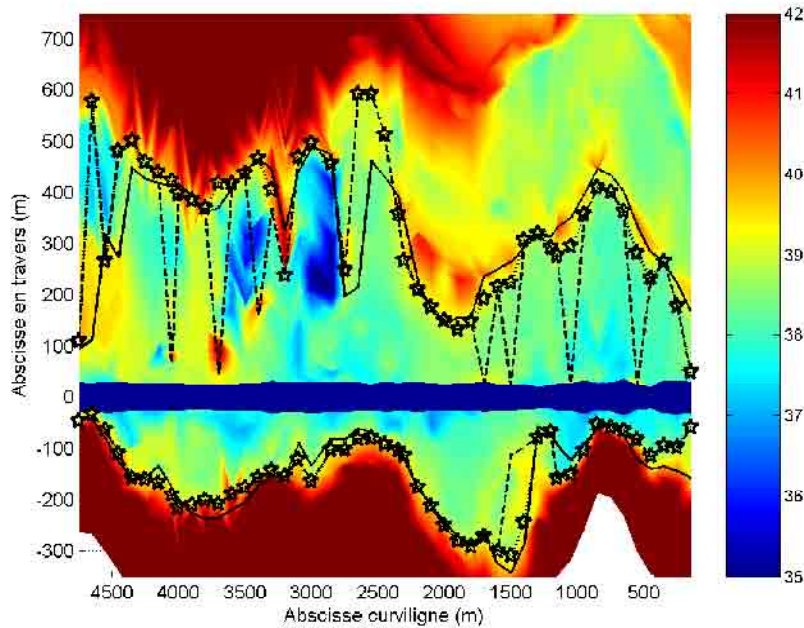


FIG. 7.10 – Vue de dessus des largeurs au miroir — observées et -- reconstituées, projetées sur la topographie, ☆ points dont l'altitude correspond à la cote d'eau reconstituée

Cependant, en cherchant les points dans la topographie du lit majeur dont l'altitude correspond à la cote d'eau reconstituée (☆, Fig. 7.10), il est possible de s'affranchir de ces pics et de contourner artificiellement les obstacles. En effet, la cote d'eau reconstituée est satisfaisante, comparée à celles obtenues par projection des largeurs observées en rive droite et en rive gauche sur la topographie de chaque rive (Fig. 7.11), comme le montre la figure (7.12). Il est donc néces-

	Φ_1
Valeur initiale	1.99×10^6
Valeur finale	1.23×10^6

TAB. 7.9 – Valeurs initiale et finale (après assimilation) de la fonction coût Φ_1

saire d'introduire dans la résolution des équations de Saint-Venant la possibilité de modéliser des écoulements secondaires, séparés de l'écoulement principal (Fig. 7.13). Une deuxième remarque peut être faite concernant la précision de la topographie utilisée. La figure (7.12) met bien en évidence les différences entre la cote obtenue par projection sur la rive gauche et celle obtenue par projection sur la rive droite : l'écart peut aller jusqu'à $\sim 5m$. Or, selon [Alquier *et al.* \(2000\)](#), une précision de 2 m en plan et de 0.5 m en altimétrie est nécessaire pour simuler correctement l'hydrodynamique d'un écoulement en lit majeur et déterminer la cote d'eau de façon satisfaisante. En ce qui concerne la prévision des zones inondées, une très bonne connaissance de la topographie est indispensable, une surélévation locale ou un creux de terrain pouvant modifier de façon radicale les conditions d'inondation. [Bates & Anderson \(1996\)](#) ont effectivement démontré qu'un petit changement dans la topographie ($\pm 10\text{ cm}$) peut avoir un impact complexe et non négligeable sur la prédiction du modèle. La topographie de l'Aisne disponible ici n'est donc probablement pas suffisamment précise pour faire de la modélisation hydraulique.

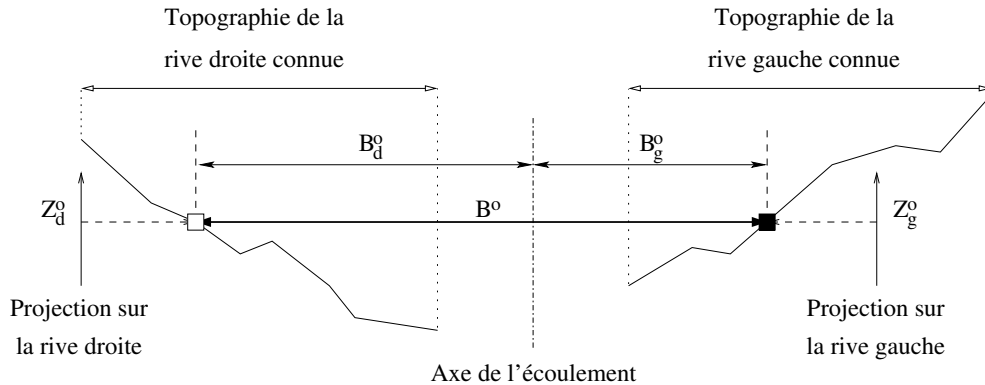


FIG. 7.11 – Obtention des cotes par projection des largeurs observées sur la topographie

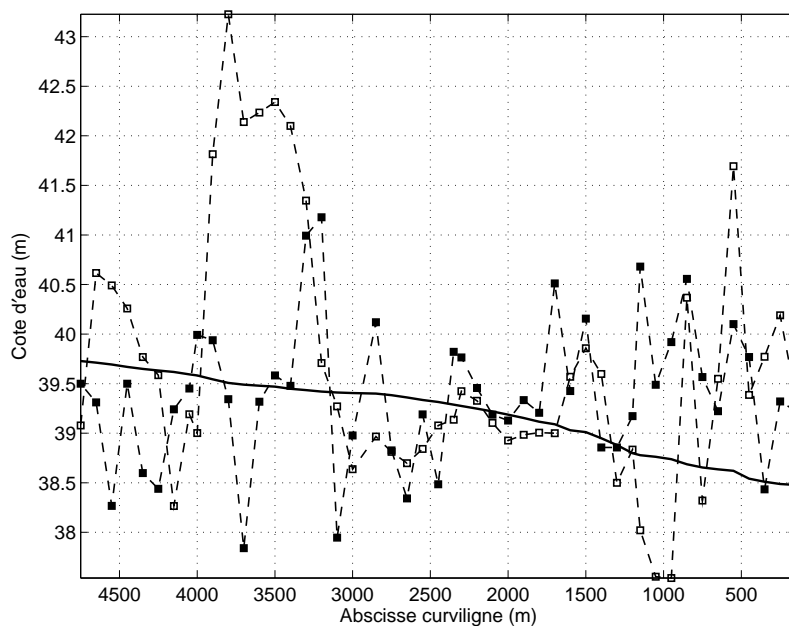


FIG. 7.12 – Comparaison entre — la cote d'eau reconstituée et celles obtenues par projection des largeurs observées sur la topographie, -□- rive droite, -■- rive gauche

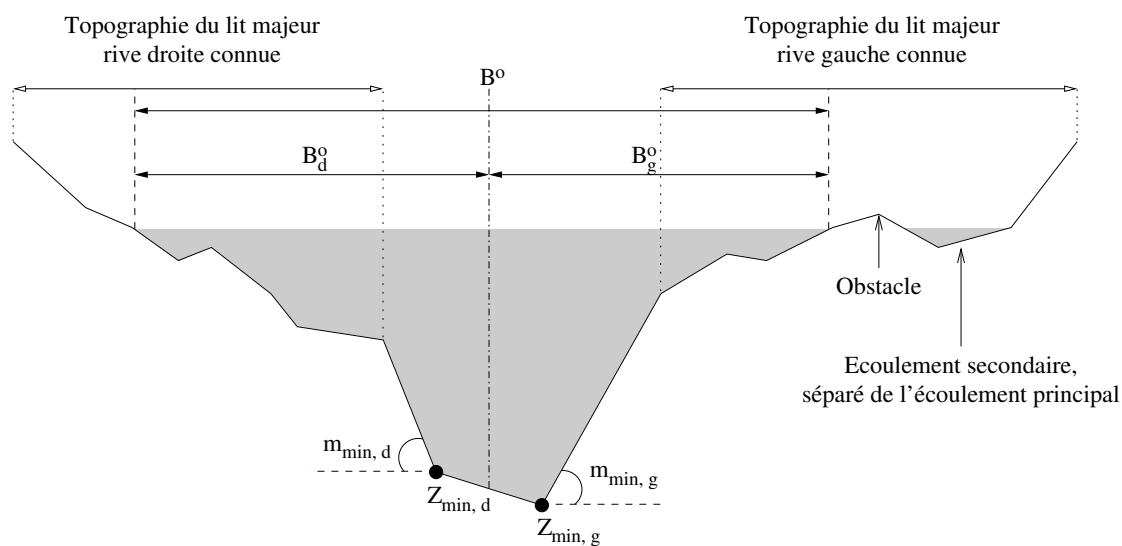


FIG. 7.13 – Écoulement secondaire

7.4 Conclusions sur le site de l'Aisne

		Paramètre	Géométrie équivalente (§ 7.2)	Utilisation de la topographie du lit majeur (§ 7.3)
Paramètres invariants en x	Hydraulique	Débit	Estimé	Estimé
		Condition aval	Estimée	Estimée
	Géométrique	Strickler lit mineur	Estimé	Estimé
		Strickler lit majeur	Estimé	Estimé
		Pente du fond du lit	Estimée	Estimée
Paramètres fonction de x	Lit mineur	Largeur du lit, rive gauche	Connue	Connue
		Largeur du lit, rive droite	Connue	Connue
		Profondeur, rive gauche	Estimée	Estimée
		Profondeur, rive droite	Estimée	Estimée
		Pente transversale, rive gauche	Estimée	Estimée
		Pente transversale, rive droite	Estimée	Estimée
	Lit majeur	Pente transversale, rive gauche	Estimée	Topographie
		Pente transversale, rive droite	Estimée	Connue

TAB. 7.10 – Récapitulatif des paramètres connus et reconstitués, cas de l'Aisne

Deux approches, reconstituant de façon différente la géométrie du profil en travers, ont été employées sur l'Aisne (Tab. 7.10).

En ce qui concerne l'introduction de la topographie du lit majeur dans le processus d'assimilation (§ 7.3), le cas particulier de l'Aisne a permis de mettre en évidence la nécessité d'introduire dans la résolution des équations de Saint-Venant la possibilité de modéliser des bras secondaires, séparés de l'écoulement principal, même si dans ces zones le débit est relativement faible étant données leur forte rugosité et la faible profondeur d'eau (Roux *et al.*, 2003). Par ailleurs, l'importance de la précision de la topographie du lit majeur a été réaffirmée, en accord avec les résultats de Alquier *et al.* (2000) et Bates & Anderson (1996).

La reconstitution d'une rivière équivalente donne de bons résultats pour un jeu d'observations (§ 7.2.2). Il est à présent nécessaire de valider ce procédé en utilisant plusieurs jeux d'observations, correspondant à des événements différents. En effet, pour que cette approche soit intéressante, il est nécessaire que les paramètres reconstitués soient également valables pour un événement différent de celui à partir duquel ils ont été estimés. Il va être possible de réaliser ces tests sur le site de la Lèze, sur lequel des observations concernant plusieurs crues sont disponibles.

Chapitre 8

Estimation de paramètres sur le site de la Lèze

Sommaire

8.1	Introduction	162
8.2	Reconstitution d'une géométrie équivalente	162
8.2.1	Résultats obtenus	163
8.2.2	Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur les grandeurs simulées	170
8.2.3	Transfert de la calibration d'un événement à un autre	172
8.3	Construction progressive du profil en travers	175
8.4	Conclusions sur le site de la Lèze	179

Ce chapitre décrit les démarches d'estimation de paramètres entreprises sur le site de la Lèze et expose les résultats obtenus.

8.1 Introduction

Sur le site de la Lèze, plusieurs zones, exemptes de singularités, ont été prises en considération (Fig. 6.6). Chacune des trois zones étudiées présente un affluent, mais pas de ramification. La modélisation retenue est par conséquent celle d'un écoulement monodimensionnel, en régime permanent, avec débit d'apport et sans débit de fuite ($q_L > 0$ et $k_L = 0$ dans l'expression (1.25)) :

$$\frac{dQ}{dx} = q_L \quad (8.1)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{I - J - 2Fr^2 \frac{S}{BQ} q_L}{1 - Fr^2} \quad (8.2)$$

Le système d'équations différentielles (8.1, 8.2) est résolu par la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4. Le coefficient de Strickler composite, fonction de la hauteur d'eau H , est calculé à partir de la formule d'Einstein :

$$K_s(H) = \left(\frac{P_w}{\sum_i \frac{P_{w_i}}{K_{s_i}^{3/2}}} \right)^{2/3} \quad (8.3)$$

P_w est le périmètre mouillé total, P_{w_i} le périmètre mouillé de la sous-section i , K_{s_i} le coefficient de Strickler de la sous-section i et i l'indice de sommation sur les différentes sous-sections. Comme sur le site de l'Aisne, les zones étudiées ont été choisies de manière à s'affranchir des éventuelles singularités de la plaine d'inondation, afin de les rendre compatibles avec la modélisation 1D, et suffisamment courtes ($< 5 \text{ km}$) pour que l'hypothèse d'un écoulement permanent soit raisonnable.

Aucune topographie n'était disponible sur le site de la Lèze, seule l'approche visant à reconstituer un profil en travers équivalent a été mise en pratique.

8.2 Reconstitution d'une géométrie équivalente

La procédure employée est identique à celle décrite au paragraphe (7.2) : une hypothèse sur la forme du profil en travers est formulée (Fig. 7.1), ce sont les caractéristiques de ce profil équivalent qui sont estimées. L'expression minimisée est la somme des carrés des erreurs entre étendues observée et simulée pour chaque rive :

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^{nsec} \left\{ \left(\mathbf{B}_d^o|_j - \mathbf{B}_d^s|_j \right)^2 + \left(\mathbf{B}_g^o|_j - \mathbf{B}_g^s|_j \right)^2 \right\} \quad (8.4)$$

j est l'indice spatial de sommation, il varie de 1 à $nsec$, $nsec$ étant le nombre total de sections en travers le long du tronçon étudié, il varie selon la zone d'étude considérée (Tab. 8.1). L'algorithme de minimisation utilisé s'apparente à celui décrit au paragraphe (2.2.2.4). Il s'agit d'un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte. Comme sur le site de l'Aisne, les informations disponibles sur les caractéristiques hydrauliques des différentes crues (Tab. 6.4 et 6.5) ont été utilisées afin de déterminer des valeurs raisonnables pour l'initialisation de l'algorithme de minimisation.

Les paramètres recherchés sont les suivants :

- un débit aval Q_{av} ($m^3.s^{-1}$),
- un débit d'apport par unité de longueur q_L ($m^2.s^{-1}$). Pour chacune des trois zones étudiées, un seul affluent est considéré comme suffisamment important pour être pris en compte (Tab. 6.3). La section d'apport est supposée connue : la position de l'affluent est lue sur la carte IGN au 1/25 000,

Zone	Situation	Longueur	n_{sec}
Zone 1	Amont de St-Sulpice-sur-Lèze	4 km	59
Zone 2	Amont de Beaumont-sur-Lèze	5 km	45
Zone 3	Aval de Lagardelle-sur-Lèze	2.5 km	17

TAB. 8.1 – Nombre total de sections en travers pour les trois zones d'étude

- une hauteur d'eau H_{av} (m), à la limite aval du tronçon car l'écoulement est infracritique,
- un coefficient de Strickler du lit mineur $K_{s,min}$ ($m^{1/3}.s^{-1}$),
- un coefficient de Strickler du lit majeur $K_{s,maj}$ ($m^{1/3}.s^{-1}$),

Tous ces paramètres sont supposés invariants le long du tronçon considéré. Contrairement au cas de l'Aisne, la pente du fond du lit I est connue, elle est calculée à partir des mesures in situ effectuées par un géomètre (Tab. 8.2). Les caractéristiques géométriques du profil équivalent choisi (Fig. 7.1), qui sont donc les paramètres à estimer, sont les suivantes :

- la profondeur du lit mineur en rive gauche $H_{lim,g}$ (m),
- la profondeur du lit mineur en rive droite $H_{lim,d}$ (m),
- la pente transversale du lit mineur en rive gauche $m_{min,g}$ ($m.m^{-1}$),
- la pente transversale du lit mineur en rive droite $m_{min,d}$ ($m.m^{-1}$),
- la pente transversale du lit majeur en rive gauche $m_{maj,g}$ ($m.m^{-1}$),
- la pente transversale du lit majeur en rive droite $m_{maj,d}$ ($m.m^{-1}$).

Ces six paramètres sont reconstitués pour chaque section en travers. Ces dernières sont situées de 50 m à 150 m l'une de l'autre. En prenant en compte l'ensemble des paramètres recherchés (Tab. 8.3), il y a donc :

- 359 paramètres à estimer pour la zone 1,
- 275 paramètres à estimer pour la zone 2,
- 107 paramètres à estimer pour la zone 3.

La largeur du fond du lit B_0 est calculée à partir de la largeur de la crue de plein bord observée B_{pb}^o , comme sur le site de l'Aisne (cf. Fig. 7.2).

Zone	Situation	Pente du fond du lit
Zone 1	Amont de St-Sulpice-sur-Lèze	$1.5 \times 10^{-3} m.m^{-1}$
Zone 2	Amont de Beaumont-sur-Lèze	$1.1 \times 10^{-3} m.m^{-1}$
Zone 3	Aval de Lagardelle-sur-Lèze	$1.5 \times 10^{-3} m.m^{-1}$

TAB. 8.2 – Pente du fond du lit pour les trois zones d'étude, calculée à partir de données in situ

8.2.1 Résultats obtenus

Comme pour le cas de l'Aisne, la reconstitution obtenue est très satisfaisante pour les quatre crues (Fig. 8.1) ainsi que le confirme le tableau (8.4) indiquant les valeurs initiale et finale de la fonction coût. Là encore, les valeurs des paramètres (Tab. 8.5 et 8.6, Fig. 8.2, 8.3 et 8.4, pour la zone 3) obtenues sont cohérentes avec la morphologie de la Lèze et les caractéristiques des différentes crues. Les valeurs optimales obtenues par assimilation des différents événements se situent dans le même ordre de grandeur, comme le montrent les figures (8.5 a) et (8.5 b), qui comparent les profondeurs du lit mineur, rive gauche, optimisées à partir de chacune des quatre crues, pour les zones 1 et 3. Seule la profondeur du lit mineur $H_{lim,g}$ reconstituée à partir de la crue de 1977 ne coïncide pas avec les trois autres sur la zone 3, c'est-à-dire la zone aval, mais

Paramètres invariants en x	Hydraulique	Débit aval	Estimé
		Débit d'apport	Estimé
		Condition aval	Estimée
	Géométrique	Strickler lit mineur	Estimé
		Strickler lit majeur	Estimé
		Pente du fond du lit	Connue
Paramètres fonction de x	Lit mineur	Largeur du lit, rive gauche	Connue
		Largeur du lit, rive droite	Connue
		Profondeur, rive gauche	Estimée
		Profondeur, rive droite	Estimée
		Pente transversale, rive gauche	Estimée
		Pente transversale, rive droite	Estimée
	Lit majeur	Pente transversale, rive gauche	Estimée
		Pente transversale, rive droite	Estimée

TAB. 8.3 – Récapitulatif des paramètres connus et reconstitués, cas de la Lèze

cette constatation peut s'expliquer par l'aménagement du lit de la Lèze, notamment dans sa partie aval, aménagement entrepris à partir des années 80.

Si les résultats obtenus sont satisfaisants en terme de reconstitution de l'étendue de la zone inondée, le tableau (8.5) montre toutefois que le débit aval Q_{av} , le débit d'apport q_L et les coefficients de Strickler ne sont pas identifiés : pour tous ces paramètres, la valeur finale est égale à la valeur choisie comme point de départ de l'algorithme de minimisation. Parmi les paramètres invariants en x , seule la valeur de la condition aval H_{av} a évolué au cours de la minimisation.

		Crue 15	Crue exceptionnelle	Crue de 1977	Crue de juin 2000
Φ_1	Valeur initiale	1.35×10^7	1.91×10^7	2.42×10^7	2.22×10^7
	Valeur finale	9.42×10^{-8}	3.61×10^{-8}	1.96×10^{-8}	1.25×10^{-10}

TAB. 8.4 – Valeurs initiale et finale (après assimilation) de la fonction coût Φ_1 , pour les quatre crues, zone 3

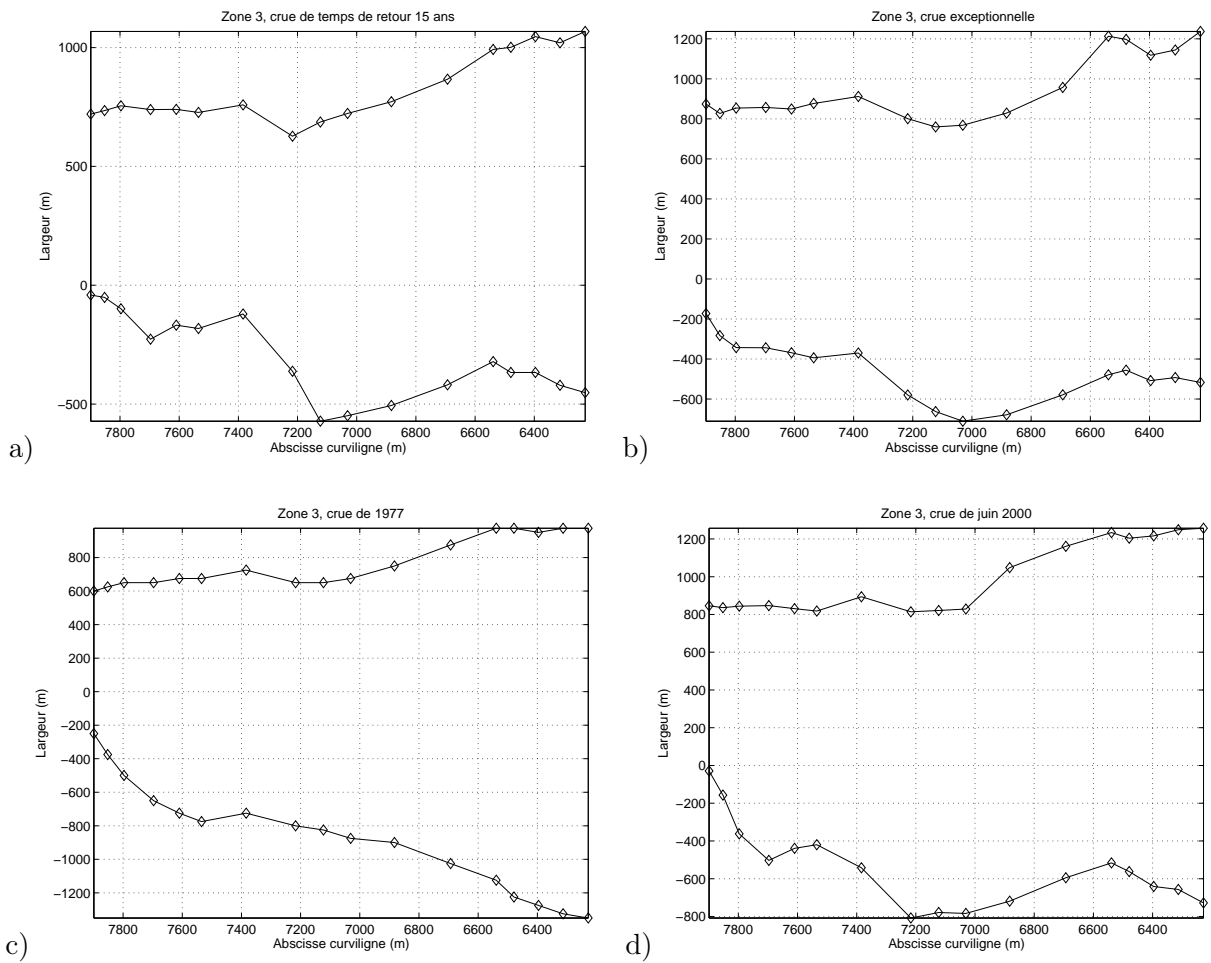


FIG. 8.1 – Comparaison des largeurs au miroir — observée et \diamond optimisée pour la zone 3 (Vue de dessus), a) crue de temps de retour 15 ans, b) crue exceptionnelle, c) crue de 1977, d) crue de juin 2000

Paramètre	Crue 15		Crue exceptionnelle	
	Initialisation	Optimum	Initialisation	Optimum
$Q_{av} (m^3.s^{-1})$	100.0	100.1	140.0	140.0
$q_L (m^2.s^{-1})$	10.0	9.9	10.0	10.0
$H_{av} (m)$	5.0	9.9	6.0	10.6
$K_{s,min} (m^{1/3}.s^{-1})$	30	30	30	30
$K_{s,maj} (m^{1/3}.s^{-1})$	10	10	10	10

Paramètre	Crue de 1977		Crue de juin 2000	
	Initialisation	Optimum	Initialisation	Optimum
$Q_{av} (m^3.s^{-1})$	140.0	140.0	140.0	140.0
$q_L (m^2.s^{-1})$	10.0	10.0	10.0	10.0
$H_{av} (m)$	6.0	11.2	6.0	10.9
$K_{s,min} (m^{1/3}.s^{-1})$	30	30	30	30
$K_{s,maj} (m^{1/3}.s^{-1})$	10	10	10	10

TAB. 8.5 – Initialisation de l'algorithme de minimisation et valeurs optimales des paramètres invariants le long du tronçon, zone 3

Paramètre	Initialisation	Crue 15	Crue excep- tionnelle	Crue 1977	Crue 2000
		Optimum	Optimum	Optimum	Optimum
$H_{lim,g} (m)$	6.0	[3.9; 5.3]	[3.8; 5.6]	[5.7; 6.7]	[4.3; 5.6]
$H_{lim,d} (m)$	6.0	[5.7; 7.9]	[5.9; 8.1]	[4.5; 7.5]	[5.5; 8.4]
$m_{min,g} (m.m^{-1})$	1.5	[1.5; 2.1]	[1.5; 1.6]	[1.5; 1.5]	[1.5; 1.6]
$m_{min,d} (m.m^{-1})$	1.5	[0.8; 1.6]	[1.4; 1.5]	[1.5; 1.6]	[1.4; 1.5]
$m_{maj,g} (m.m^{-1})$	200.0	[200.0; 200.0]	[200.0; 200.0]	[199.9; 200.0]	[200.0; 200.0]
$m_{maj,d} (m.m^{-1})$	200.0	[200.0; 200.0]	[199.9; 200.0]	[200.0; 200.0]	[199.9; 200.0]

TAB. 8.6 – Initialisation de l'algorithme de minimisation et intervalles des valeurs optimales des paramètres variants le long du tronçon, zone 3

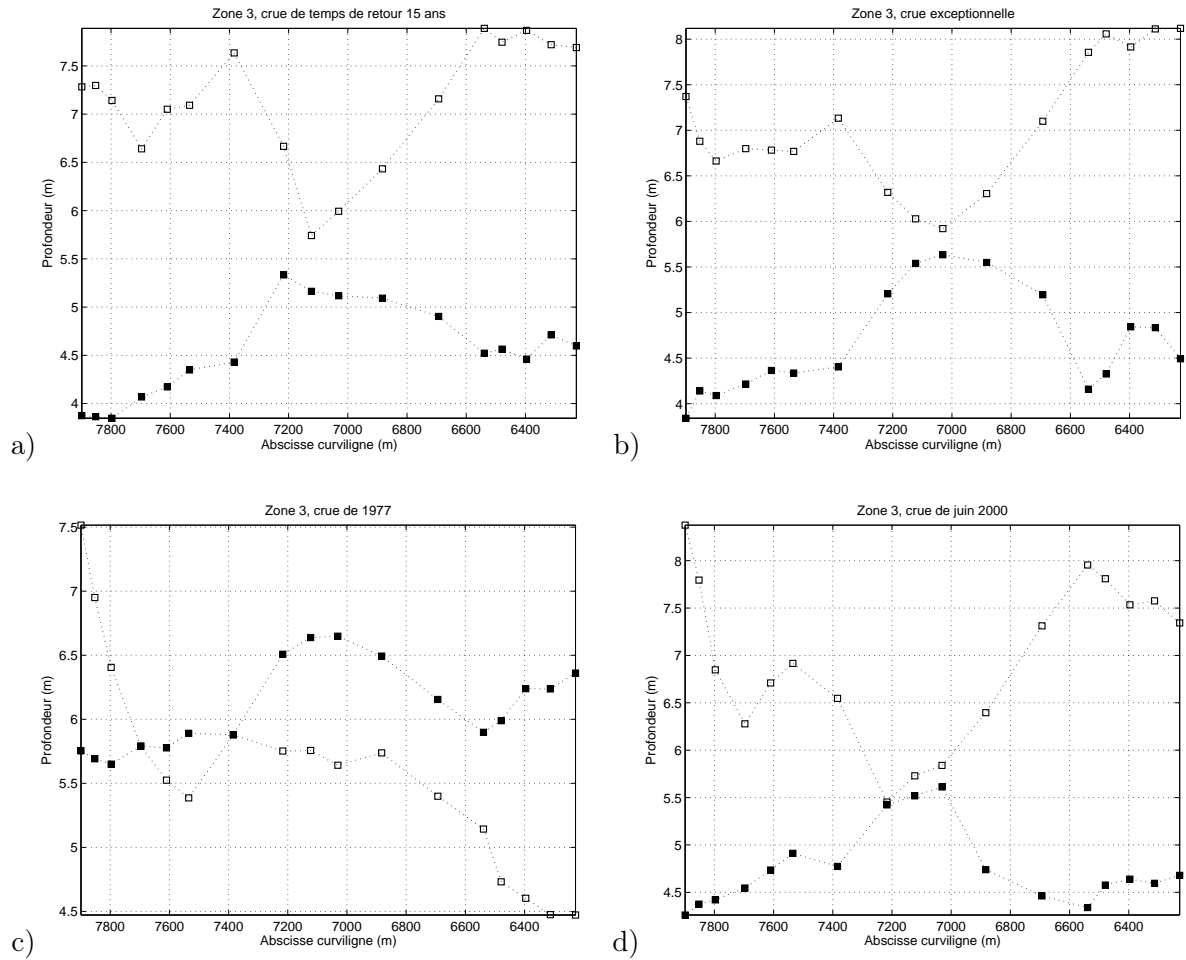


FIG. 8.2 – Valeurs de la profondeur du lit mineur estimées, \square rive droite, \blacksquare rive gauche, pour la zone 3, a) crue de temps de retour 15 ans, b) crue exceptionnelle, c) crue de 1977, d) crue de juin 2000

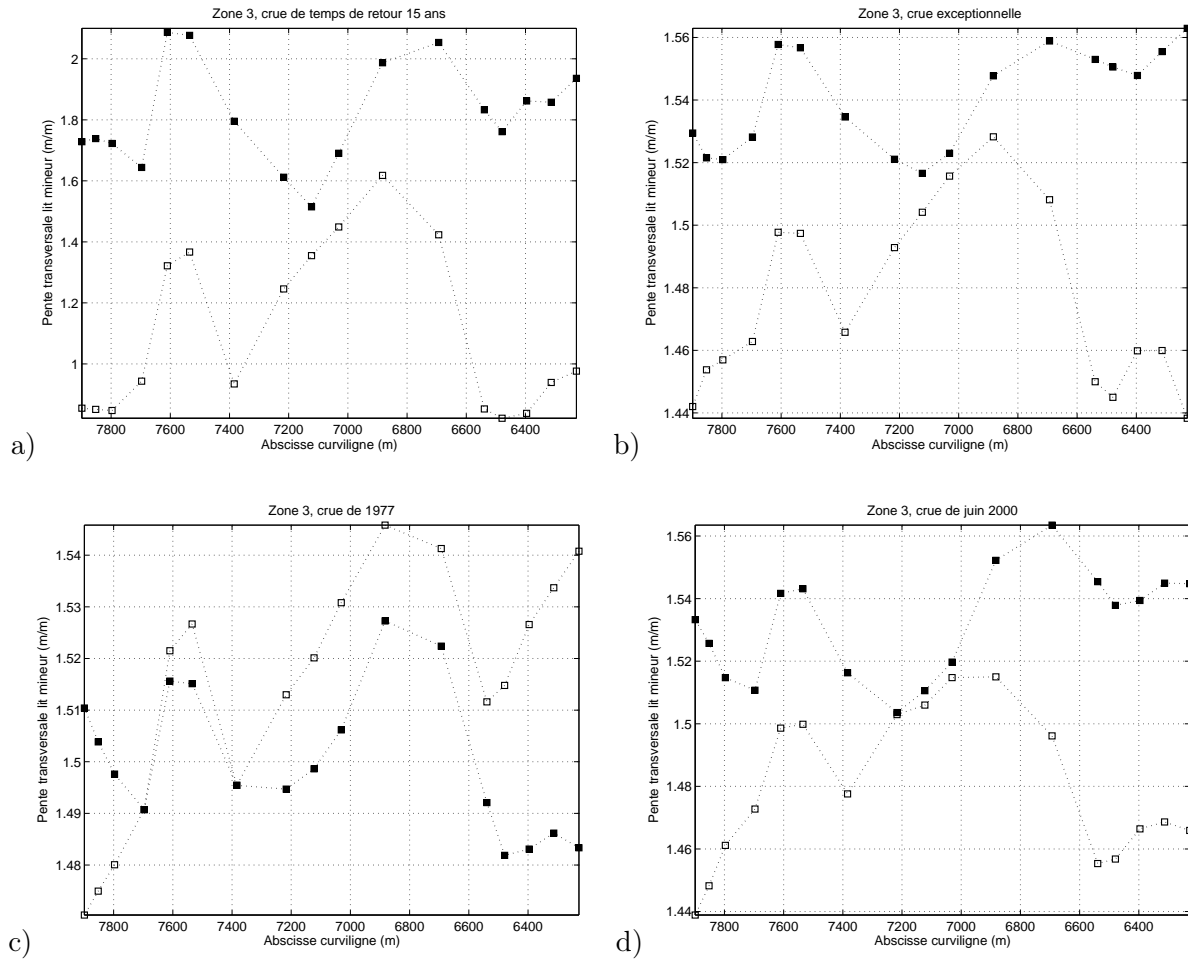


FIG. 8.3 – Valeurs de la pente transversale du lit mineur estimées, \square rive droite, \blacksquare rive gauche, pour la zone 3, a) crue de temps de retour 15 ans, b) crue exceptionnelle, c) crue de 1977, d) crue de juin 2000

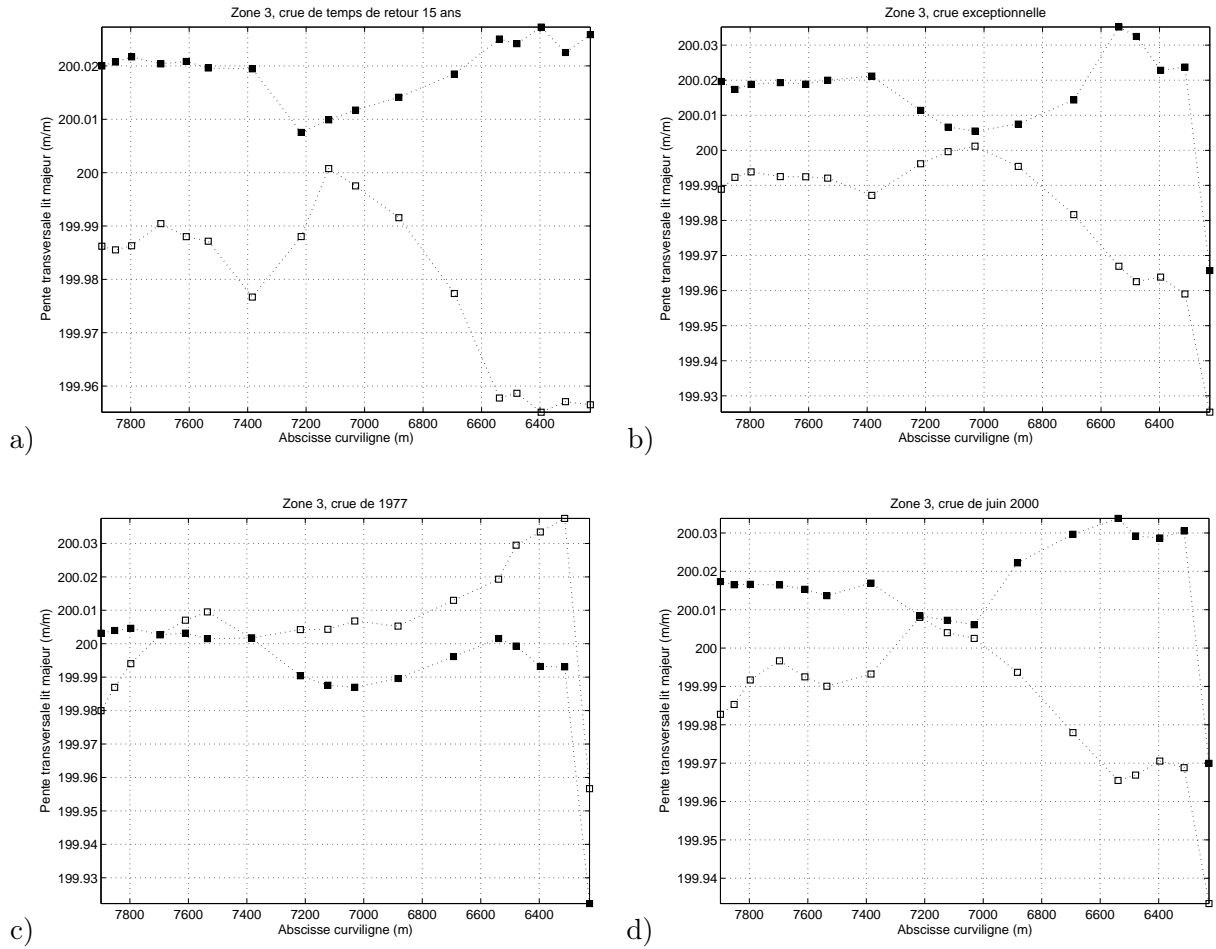


FIG. 8.4 – Valeurs de la pente transversale du lit majeur estimées, \square rive droite, \blacksquare rive gauche, pour la zone 3, a) crue de temps de retour 15 ans, b) crue exceptionnelle, c) crue de 1977, d) crue de juin 2000

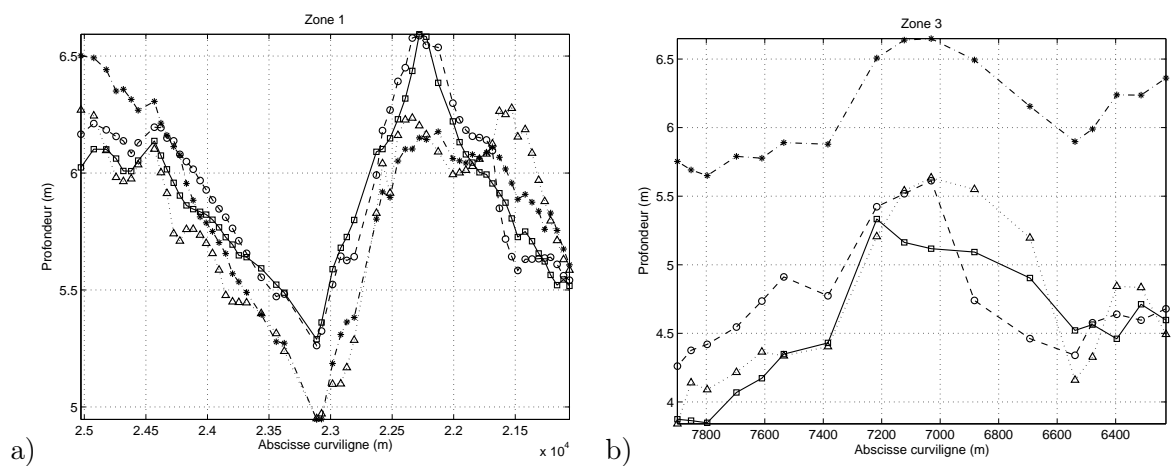


FIG. 8.5 – Comparaison des valeurs de la profondeur du lit mineur rive gauche estimées, $\text{—}\circ\text{—}$ crue de temps de retour 15 ans, $\text{---}\triangle\text{---}$ crue exceptionnelle, $\text{---}\ast\text{---}$ crue de 1977, $\text{---}\circ\text{---}$ crue de juin 2000, a) zone 1, b) zone 3

8.2.2 Analyse de sensibilité et estimation de l'incertitude sur les grandeurs simulées

Les méthodes de l'analyse de sensibilité généralisée (GSA, § 2.3.1) et GLUE (Generalized Likelihood Uncertainty Estimation, § 2.3.2) sont mises en oeuvre en utilisant, comme dans le cas de l'Aisne (§ 7.2.3) :

- la fonction de vraisemblance “efficacité du modèle” \mathcal{L}_e :

$$\mathcal{L}_e = 1 - \frac{\sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right)^2}{\sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \overline{\mathbf{B}^o} \right)^2}, \quad \sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right)^2 < \sum_j \left(\mathbf{B}^o|_j - \overline{\mathbf{B}^o} \right)^2 \quad (8.5)$$

- des intervalles de variation des paramètres pour les simulations Monte-Carlo centrés sur les valeurs optimales résultant de la minimisation de la fonction coût, avec un écart de $\pm 10\%$ autour de ces valeurs.

La distribution des paramètres à l'intérieur de leurs intervalles de variation respectifs est supposée uniforme et les simulations Monte-Carlo consistent en plusieurs tirages aléatoires de tous les paramètres recherchés.

10 % de ces tirages, ceux correspondant aux simulations ayant les valeurs de vraisemblance les plus élevées, sont choisis comme ayant un comportement correct (*behavioural*). Le seuil qui va séparer les modèles ayant un comportement correct de ceux ayant un comportement incorrect est alors la plus faible valeur de vraisemblance de ces simulations *behavioural*. A partir de là, il est possible de calculer les densités de probabilité cumulatives de chaque paramètre, ainsi que les statistiques de Kolmogorov correspondantes (Tab. 8.7, pour la crue de temps de retour 15 ans sur la zone 3). Les valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov d_{m_c, n_c} , pour $n_c = 1000$ simulations *behavioural* sur un total de 10000 simulations, sont récapitulées dans le tableau (8.8).

	Paramètre	d_{m_c, n_c}		Paramètre	$\overline{d_{m_c, n_c}}$
		\mathcal{L}_e			\mathcal{L}_e
a)	Q_{av}	0.020	b)	$H_{lim, g}$	0.041
	q_L	0.022		$H_{lim, d}$	0.042
	H_{av}	0.304		$m_{min, g}$	0.034
	$K_{s, min}$	0.043		$m_{min, d}$	0.036
	$K_{s, maj}$	0.027		$m_{maj, g}$	0.035
				$m_{maj, d}$	0.034

TAB. 8.7 – Valeurs de la statistique de Kolmogorov obtenues à partir des simulations Monte-Carlo, nombre de simulations *behavioural* $n_c = 1000$ pour un total de 10000 simulations, zone 3, crue de temps de retour 15 ans, a) pour les paramètres invariants en x , b) pour les paramètres fonction de x : $\overline{d_{m_c, n_c}}$ est la moyenne sur le nombre de sections en travers

Les résultats obtenus permettent de faire les remarques suivantes, en matière d'analyse de sensibilité du modèle au premier ordre :

- le modèle est très sensible à la condition aval H_{av} , et, dans une moindre mesure, à la profondeur du lit mineur, en rive gauche, $H_{lim, g}$, et en rive droite, $H_{lim, d}$,
- le modèle est peu sensible au débit aval Q_{av} , ainsi qu'au débit d'apport q_L et au coefficient de Strickler du lit majeur $K_{s, maj}$.

Ces constatations confirment les résultats exposés ci-dessus (§ 8.2.1), à savoir que le débit aval Q_{av} , le débit d'apport q_L et le coefficient de Strickler $K_{s, maj}$ ne sont pas identifiés : le modèle étant peu sensible à ces paramètres, ils ne sont pas identifiables.

Niveau de signification	Risque de première espèce	Valeur critique de d_{m_c, n_c}
90.0 %	0.100	0.041
95.0 %	0.050	0.045
97.5 %	0.025	0.049
99.0 %	0.010	0.054
99.5 %	0.005	0.058
99.9 %	0.001	0.065

TAB. 8.8 – Valeurs critiques de la statistique de Kolmogorov, compte-tenu de la taille des échantillons sur la zone 3

Cette analyse est toutefois à considérer avec précaution car elle ne tient pas compte des corrélations entre les différents paramètres. Or, la hauteur aval H_{av} , à laquelle le modèle est très sensible, est fortement corrélée au débit aval Q_{av} , auquel le modèle semble ne pas être sensible, au premier ordre. En réalisant une deuxième analyse de sensibilité, identique à la précédente, mais pour laquelle la valeur de la condition aval H_{av} est fixée à la valeur optimale résultant de la minimisation, la sensibilité du modèle au débit Q_{av} augmente : la valeur de la statistique de Kolmogorov d_{m_c, n_c} obtenue pour Q_{av} passe de $d_{m_c, n_c}(Q_{av}) = 0.020$, lorsque H_{av} varie, à $d_{m_c, n_c}(Q_{av}) = 0.061$, lorsque H_{av} est fixée (Valeurs obtenues à partir de la fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e , pour $n_c = 1000$ simulations *behavioural*, sur un total de 10000 simulations de la crue de temps de retour 15 ans sur la zone 3). Pour aller plus loin dans l'étude des interactions entre paramètres, il serait nécessaire d'examiner les matrices de covariance des vecteurs de paramètres. Cette remarque montre cependant qu'il pourrait être judicieux de tenir compte de la corrélation entre H_{av} et Q_{av} dans le procédé de minimisation, en introduisant une relation hauteur/débit $H_{av} = H_{av}(Q_{av})$ à la limite aval du bief.

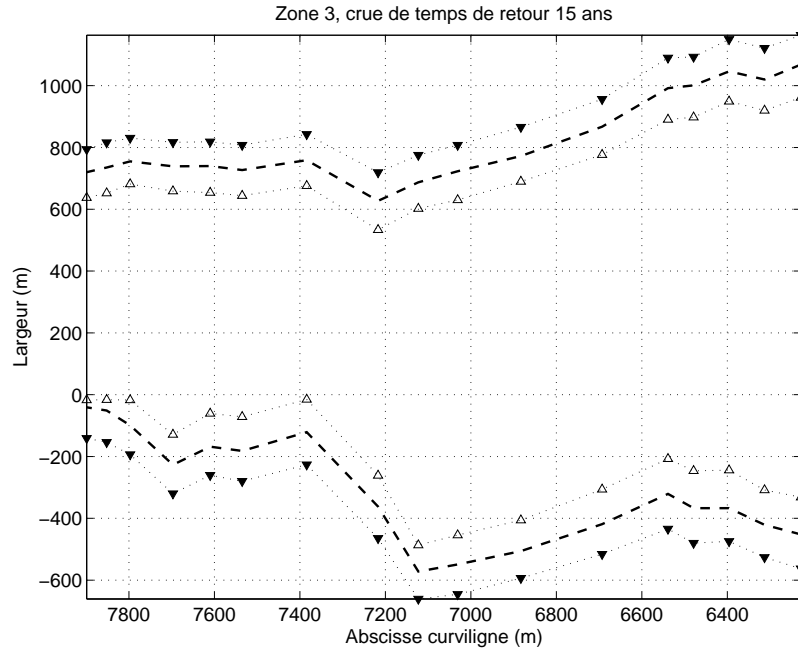


FIG. 8.6 – Marges d'incertitude, \triangle 10 % et \square 90 %, sur $--$ l'extension de la zone inondée par la crue de temps de retour 15 ans, simulée à partir des paramètres optimisés, zone 3

Revenant à l'analyse de sensibilité complète, en utilisant les simulations ayant eu un comportement correct, il est possible de calculer, comme exposé au paragraphe (2.3.2.4), les densités de probabilité cumulatives des grandeurs simulées (c'est-à-dire de l'extension de la zone inondée, en rive droite \mathbf{B}_d^s et en rive gauche \mathbf{B}_g^s), pour chaque section en travers, et, à partir de là, d'en déduire les marges d'incertitude sur ces grandeurs simulées. La figure (8.6) présente ces marges d'incertitude sur l'extension de la zone inondée par la crue de temps de retour 15 ans, en rive droite et en rive gauche, simulée à partir des paramètres optimisés, pour la zone 3. Elles correspondent à un écart moyen d'environ $\pm 90\text{ m}$ en rive gauche et $\pm 100\text{ m}$ en rive droite. Ici encore, comme sur le site de l'Aisne (§ 7.2.3), une variation relativement faible ($\pm 10\%$) de tous les paramètres par rapport à leur valeur optimale occasionne une marge d'incertitude très importante sur les largeurs simulées, en rive gauche, \mathbf{B}_g^s , et en rive droite, \mathbf{B}_d^s .

8.2.3 Transfert de la calibration d'un événement à un autre

L'avantage principal, par rapport au site de l'Aisne, est que, sur le site de la Lèze, plusieurs événements sont disponibles. Il est donc possible de tester la portabilité de la géométrie équivalente reconstituée, c'est-à-dire de vérifier si cette géométrie, reconstituée à partir d'un événement unique, permet de simuler un autre événement, de caractéristiques hydrauliques différentes.

Pour transférer la calibration d'un événement (1) à un événement (2), les paramètres nécessaires sont les suivants :

- les paramètres hydrauliques : le débit aval Q_{av} , le débit d'apport q_L et la condition aval H_{av} . Ils sont pris égaux aux valeurs optimales obtenues par assimilation des observations relatives à la crue (2) (Tab. 8.5),
- les coefficients de Strickler, $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$, et la géométrie du cours d'eau. Ils sont pris égaux aux valeurs optimales obtenues par assimilation des observations relatives à la crue (1).

Ces paramètres permettent de simuler l'étendue B de la zone inondée pour l'événement (2), à partir de la géométrie équivalente relative à la crue (1). Afin de comparer ces grandeurs simulées \mathbf{B}^s avec les grandeurs observées \mathbf{B}^o pour l'événement (2), les erreurs sont calculées comme suit :

$$\Delta B = \frac{1}{nsec} \sum_{j=1}^{nsec} \left| \mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right| \quad (8.6)$$

$$\delta_B = \frac{1}{nsec} \sum_{j=1}^{nsec} \left| \frac{\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j}{\mathbf{B}^o|_j} \right| \quad (8.7)$$

j est l'indice spatial de sommation, il varie de 1 à $nsec$, $nsec$ étant le nombre de sections en travers de la zone considérée. Les valeurs de ΔB et δ_B pour la zone 3 sont listées dans le tableau (8.9). Lorsque les événements sont de caractéristiques hydrauliques très différentes, comme la crue de temps de retour 15 ans et la crue de 1977, par exemple, le transfert de calibration ne donne pas de bons résultats, comme le montre la figure (8.7). L'étendue de la zone inondée de la crue de 1977, simulée à partir de la géométrie équivalente relative à la crue de temps de retour 15 ans, n'est pas satisfaisante. Elle présente une erreur moyenne ΔB de 209 m et une erreur relative δ_B égale à 12.3 %. En revanche, lorsque les caractéristiques hydrauliques des deux événements sont plus proches, comme la crue exceptionnelle et la crue de juin 2000 (Fig. 8.8), les résultats sont un peu plus satisfaisants : ΔB peut descendre jusqu'à 106 m pour la zone 3 ($\delta_B = 6.26\%$), et jusqu'à 64 m pour la zone 2 ($\delta_B = 8.72\%$, Fig. 8.9). Les résultats obtenus sur les zones 1 et 2 (Annexe E) corroborent ces constatations.

Dans tous les cas, l'étendue de la zone inondée de la crue de 1977, simulée à partir de la géométrie équivalente relative à une des trois autres crues donne les résultats les moins satisfaisants ($\delta_B \geq 11.1\%$, zone 3). De plus, la géométrie équivalente reconstituée à partir de la crue

Crue à partir de laquelle la géométrie a été calibrée	Crue simulée	ΔB (Eq. 8.6)	δ_B (Eq. 8.7)
Crue 15	Crue exceptionnelle	65 m	4.64 %
Crue 15	Crue 1977	209 m	12.3 %
Crue 15	Crue 2000	89 m	5.03 %
Crue exceptionnelle	Crue 15	65 m	5.73 %
Crue exceptionnelle	Crue 1977	212 m	12.7 %
Crue exceptionnelle	Crue 2000	106 m	6.26 %
Crue 1977	Crue 15	206 m	18.2 %
Crue 1977	Crue exceptionnelle	211 m	15.0 %
Crue 1977	Crue 2000	180 m	12.0 %
Crue 2000	Crue 15	74 m	5.80 %
Crue 2000	Crue exceptionnelle	103 m	6.92 %
Crue 2000	Crue 1977	180 m	11.1 %

TAB. 8.9 – Simulation d'une crue à partir de la géométrie calibrée sur une autre crue : erreur sur les grandeurs simulées, zone 3

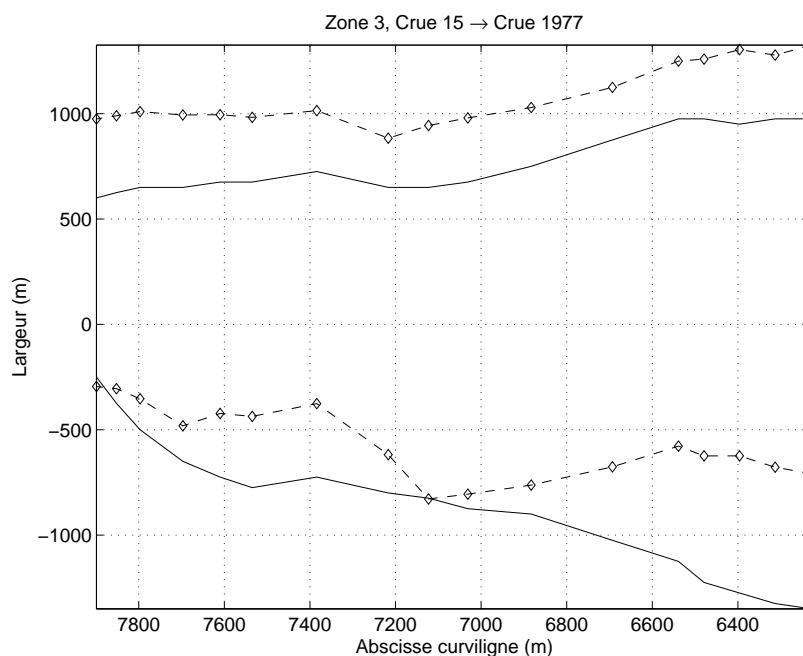


FIG. 8.7 – Simulation de la crue de 1977 à partir de la géométrie calibrée sur la crue de temps de retour 15 ans, — grandeurs observées et -◇- grandeurs simulées, zone 3

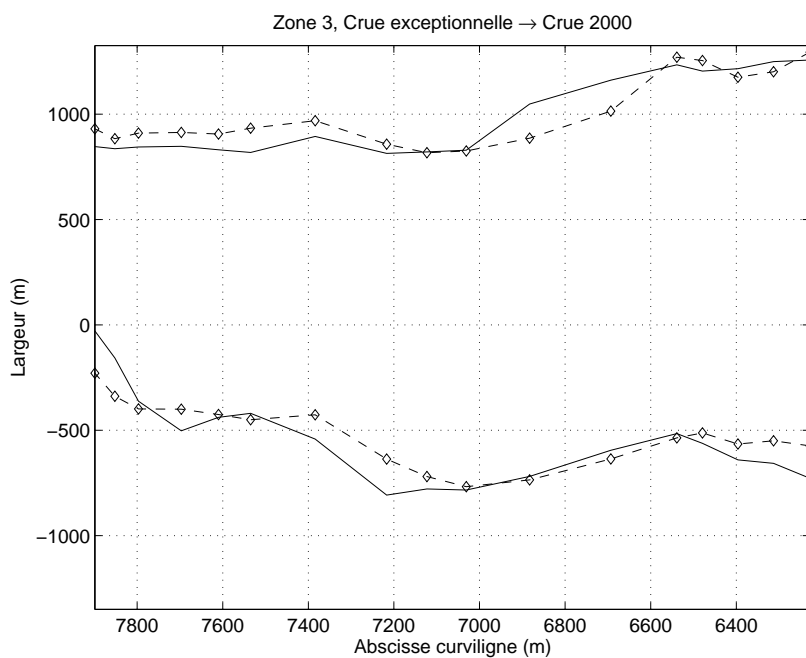


FIG. 8.8 – Simulation de la crue de juin 2000 à partir de la géométrie calibrée sur la crue exceptionnelle, — grandeurs observées et -◇- grandeurs simulées, zone 3

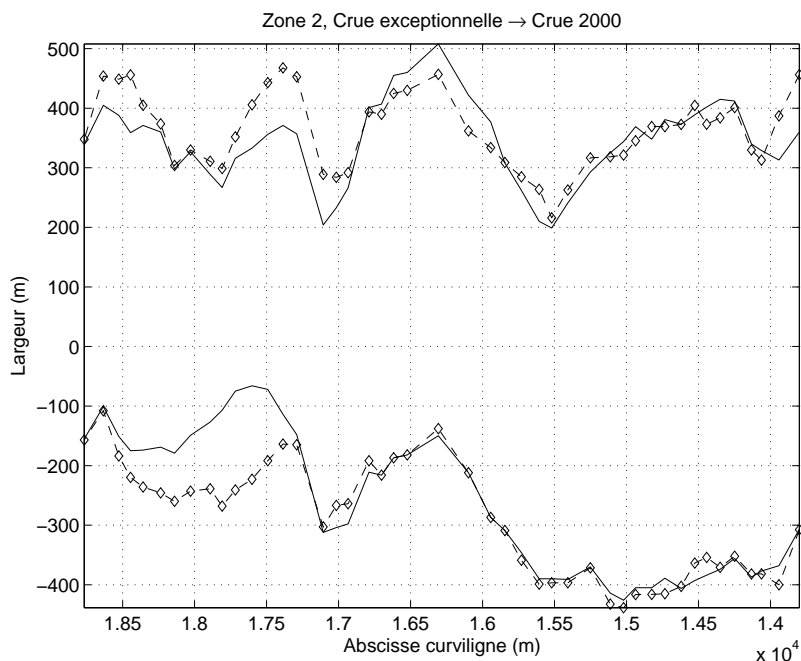


FIG. 8.9 – Simulation de la crue de juin 2000 à partir de la géométrie calibrée sur la crue exceptionnelle, — grandeurs observées et -◇- grandeurs simulées, zone 2

de 1977 ne permet pas de simuler correctement les autres crues ($\delta_B \geq 12.0\%$ dans tous les cas, zone 3). Le fait que la crue de 1977 se démarque des trois autres avait d'ailleurs déjà été établi dès le paragraphe (8.2.1). L'historique de l'aménagement de la Lèze peut expliquer cette constatation. En effet, la Lèze a connu différents programmes de travaux, notamment d'endiguement, si bien que sa capacité hydraulique a augmenté de façon significative. L'essentiel des travaux ayant été réalisé vers 1980, le lit de la Lèze tel qu'il était en 1977 n'est plus représentatif de l'état actuel, d'où la difficulté de simuler correctement cette crue lorsque la géométrie a été reconstituée à partir d'observations postérieures à 1980. Les débits maximaux instantanés de la crue de 1977, $75.5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ à Lézat-sur-Lèze et $98.5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ à Labarthe-sur-Lèze, longtemps considérés comme des références pour la vallée de la Lèze, ne sont plus aujourd'hui véritablement représentatifs des crues débordantes de ce cours d'eau. C'est pourquoi la crue de 1977 ne sera plus utilisée dans la suite de cette étude.

8.3 Construction progressive du profil en travers

Selon Werner (2001), la pertinence de la reconstitution est susceptible d'être améliorée en introduisant plusieurs jeux d'observations dans le procédé d'assimilation. Il est par exemple envisageable de construire progressivement le profil en travers (Fig. 8.10). Une première minimisation considérant un événement (1) de débit Q_1 permet de reconstituer les caractéristiques géométriques d'un profil présentant quatre pentes transversales, comme celui de la figure (7.1). Ces points étant désormais considérés comme connus, l'introduction d'un deuxième événement (2) de débit Q_2 supérieur au débit Q_1 du premier événement (1) sert alors à déterminer un changement de pente dans le lit majeur.

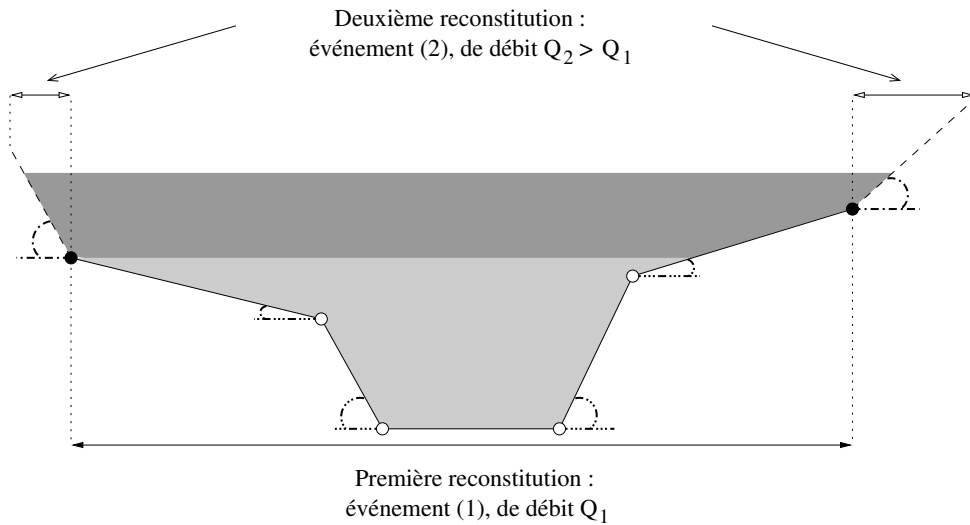


FIG. 8.10 – Reconstitution progressive du profil en travers

Il y a donc quatre nouveaux paramètres à estimer pour chaque section en travers (Tab. 8.10) :

- la hauteur de changement de pente, en rive gauche $H_{2,g}$, et en rive droite $H_{2,d}$,
- la deuxième pente transversale du lit majeur, en rive gauche $m_{2,g}$, et en rive droite $m_{2,d}$.

Les autres paramètres nécessaires à la simulation sont fournis par les résultats de l'assimilation d'une seule crue :

- les paramètres hydrauliques, c'est-à-dire le débit aval Q_{av} , le débit d'apport q_L et la condition aval H_{av} , sont pris égaux aux valeurs optimales obtenues par assimilation des observations relatives à la crue (2) (Tab. 8.5),

- les coefficients de Strickler, $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$, et la géométrie à quatre pente sont pris égaux aux valeurs optimales obtenues par assimilation des observations relatives à la crue (1).

Paramètres invariants en x	Hydraulique	Débit aval	Étape n°1
		Débit d'apport	Étape n°1
		Condition aval	Étape n°1
	Géométrique	Strickler lit mineur	Étape n°1
		Strickler lit majeur	Étape n°1
		Pente du fond du lit	Connue
Paramètres fonction de x	Lit mineur	Largeur du lit, rive gauche	Connue
		Largeur du lit, rive droite	Connue
		Profondeur, rive gauche	Étape n°1
		Profondeur, rive droite	Étape n°1
		Pente transversale, rive gauche	Étape n°1
		Pente transversale, rive droite	Étape n°1
	Lit majeur	1 ^{ère} pente transversale, rive gauche	Étape n°1
		1 ^{ère} pente transversale, rive droite	Étape n°1
		Hauteur de changement de pente, rive gauche	Étape n°2
		Hauteur de changement de pente, rive droite	Étape n°2
		2 ^{ème} pente transversale, rive gauche	Étape n°2
		2 ^{ème} pente transversale, rive droite	Étape n°2

TAB. 8.10 – Récapitulatif des paramètres connus et optimisés lors des étapes n°1 et 2

Les résultats présentés à présent sont relatifs au cas suivant :

- étape n°1 : profil en travers à quatre pentes reconstitué à partir de la crue de temps de retour 15 ans,
- étape n°2 : changement de pente dans le lit majeur reconstitué à partir de la crue de juin 2000.

Après l'étape n°2, la reconstitution obtenue est correcte, comme le montre la figure (8.11), qui présente une vue de dessus de l'étendue de la plaine d'inondation comparant les largeurs observées, pour la crue de juin 2000, et celles simulées avec les paramètres optimisés, ainsi que le tableau (8.11), indiquant les valeurs initiale et finale de la fonction coût. Là encore, les valeurs obtenues sont cohérentes avec la morphologie du cours d'eau (Tab. 8.12 et Fig. 8.12). Reste à tester la portabilité de la géométrie reconstituée.

		Crue de juin 2000
Φ_1	Valeur initiale	1.82×10^6
	Valeur finale	2.03×10^5

TAB. 8.11 – Valeurs initiale et finale (avant et après l'étape n°2) de la fonction coût Φ_1 , zone 3

De la même manière que ci-dessus (§ 8.2.3), pour transférer la calibration, obtenue à partir de deux événements (1) et (2) à un événement (3), les paramètres nécessaires sont choisis de la façon suivante :

	Crue de juin 2000	
	Initialisation	Optimum
$H_{2,g} (m)$	$H_{lim,g}^a + 2$	[7.4; 11.5]
$H_{2,d} (m)$	$H_{lim,d}^a + 2$	[9.1; 12.2]
$m_{2,g} (m.m^{-1})$	$\frac{1}{2}m_{maj,g}^a$	[100.0; 100.2]
$m_{2,d} (m.m^{-1})$	$\frac{1}{2}m_{maj,d}^a$	[100.0; 100.0]

TAB. 8.12 – Initialisation de l’algorithme de minimisation et valeurs optimales des paramètres estimés lors de l’étape n°2, zone 3

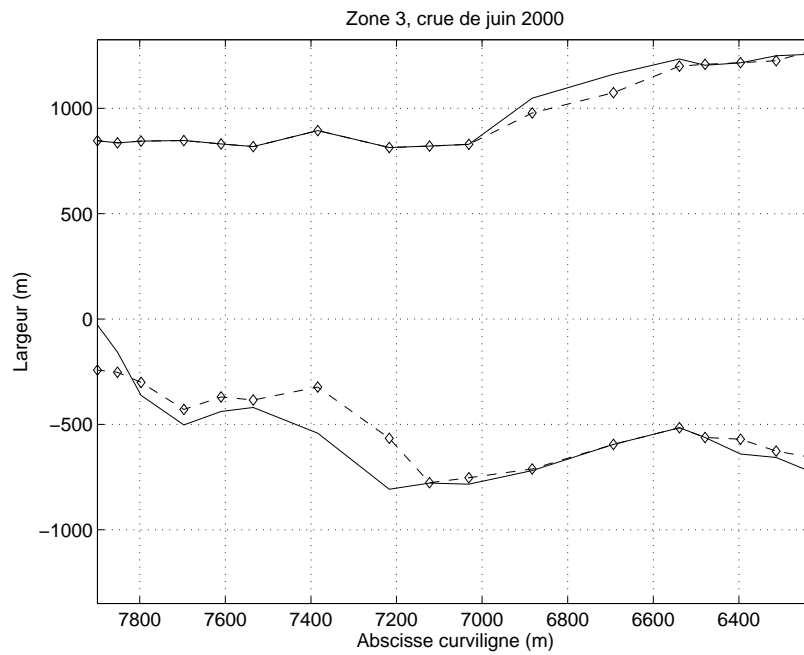


FIG. 8.11 – Comparaison des largeurs au miroir — observées et -◇- optimisées (après l’étape n°2 : changement de pente dans le lit majeur identifié à partir de la crue de juin 2000), zone 3

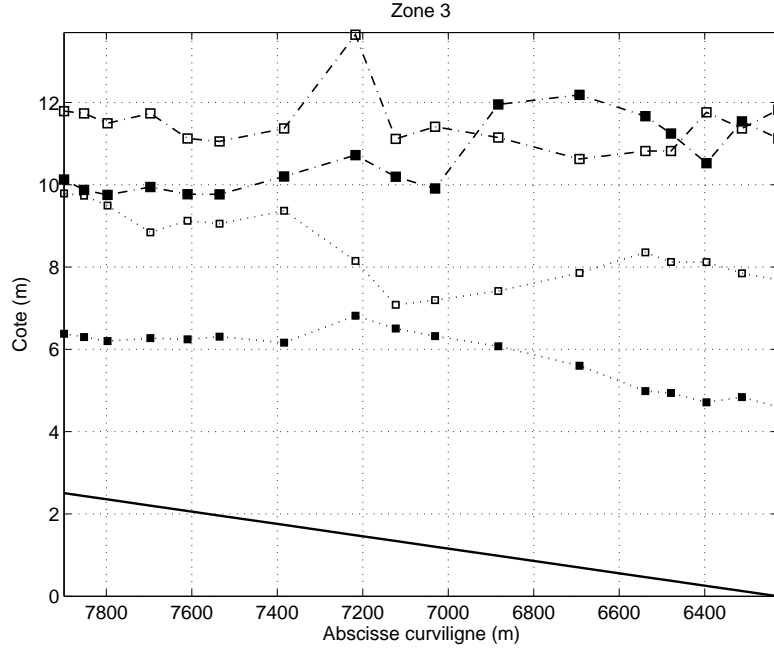


FIG. 8.12 – Cotes des berges du lit mineur optimisées (après l'étape n°1), $\cdots\Box\cdots$ rive droite, $\cdots\blacksquare\cdots$ rive gauche, et cotes de changement de pente du lit majeur optimisées (après l'étape n°2), $\cdots\Box\cdots$ rive droite, $\cdots\blacksquare\cdots$ rive gauche, — cote du fond du lit, zone 3 (Cote de référence : cote de la section aval)

- les paramètres hydrauliques : le débit aval Q_{av} , le débit d'apport q_L et la condition aval H_{av} . Ils sont pris égaux aux valeurs optimales obtenues par assimilation des observations relatives à la crue (3) (Tab. 8.5),
- les coefficients de Strickler, $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$, et la géométrie du cours d'eau. Ils sont pris égaux aux valeurs optimales obtenues par assimilation des observations relatives à la crue (1) (étape n°1) et à la crue (2) (étape n°2).

Les valeurs des erreurs ΔB et δ_B sont listées dans le tableau (8.13). La figure (8.13) montre une vue de dessus de l'étendue de la plaine d'inondation comparant les largeurs observées, pour la crue exceptionnelle, et celles simulées avec la géométrie optimisée. Par comparaison, lorsque la géométrie avait été reconstituée en utilisant la crue de juin 2000 seulement, l'erreur commise en simulant la crue exceptionnelle était de $\delta_B = 6.92\%$, elle est passée à $\delta_B = 5.37\%$, il n'y a donc pas d'amélioration vraiment sensible.

Crue simulée	ΔB (Eq. 8.6)	δ_B (Eq. 8.7)
Crue 15	2.47 m	0.16 %
Crue exceptionnelle	79.4 m	5.37 %
Crue 2000	83.8 m	4.94 %

TAB. 8.13 – Erreur sur les grandeurs simulées, zone 3, simulation d'une crue à partir de la géométrie construite en deux étapes ; étape n°1 : profil en travers à quatre pentes identifié à partir de la crue de temps de retour 15 ans, étape n°2 : changement de pente dans le lit majeur identifié à partir de la crue de juin 2000

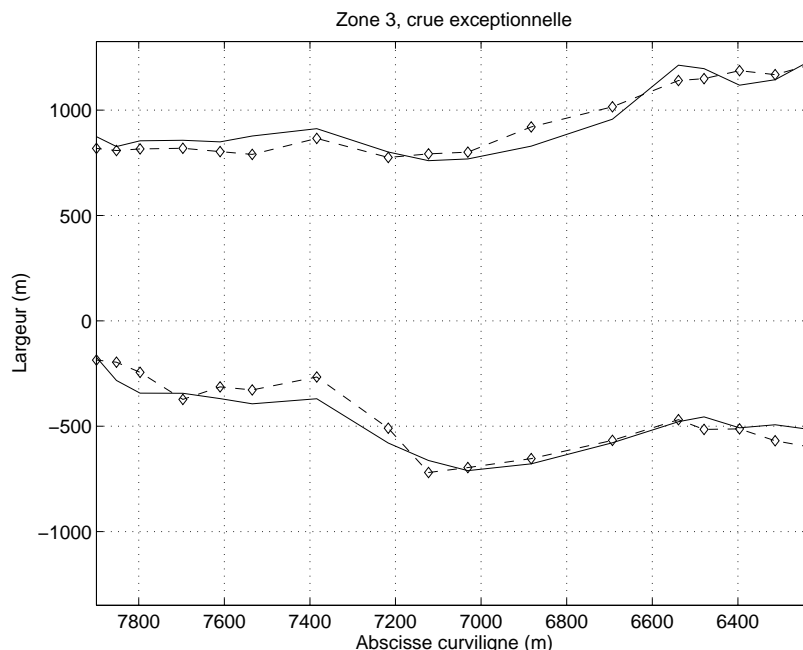


FIG. 8.13 – Simulation de la crue exceptionnelle à partir de la géométrie équivalente construite en deux étapes (cf. Fig. 8.10). Étape n°1 : profil en travers à quatre pentes identifié à partir de la crue de temps de retour 15 ans, étape n°2 : changement de pente dans le lit majeur identifié à partir de la crue de juin 2000, — grandeurs observées et -◇- grandeurs simulées, zone 3

8.4 Conclusions sur le site de la Lèze

Tout comme pour le site de l'Aisne, la reconstitution d'une rivière équivalente à partir d'un événement donne de bons résultats. Des observations concernant plusieurs événements étaient disponibles sur le site de la Lèze, ce qui a permis de tester la portabilité de la géométrie équivalente reconstituée à partir d'un seul événement. Ce transfert de calibration a mis en évidence le cas particulier de la crue de 1977. En effet, la géométrie équivalente reconstituée à partir de la crue de 1977 ne permet pas de simuler correctement les autres crues, et, à l'inverse, la géométrie équivalente reconstituée à partir de l'une quelconque des trois autres crues ne permet pas de simuler correctement la crue de 1977. Il s'agit d'un point positif : les aménagements, réalisés sur le lit de la Lèze dans les années 1980, ont modifié celui-ci de façon importante. Le fait que les géométries équivalentes, reconstituées à partir de crues ayant eu lieu avant et après les années 1980, ne soient pas compatibles, montre que cette reconstitution, tout en étant très simplifiée, rend néanmoins compte de la géométrie réelle du lit.

Un processus de construction progressive du profil en travers à partir de plusieurs événements a également été mis au point. Partant d'une géométrie des profils en travers qui est très éloignée de la réalité (Fig. 7.1), le but de cette "construction progressive" est de s'en rapprocher petit à petit. Les résultats obtenus permettent de simuler l'étendue de la zone inondée, à partir de la géométrie à huit pentes, avec une erreur relative δ_B inférieure à 5 % pour la crue de temps de retour 15 ans, la crue exceptionnelle et la crue de juin 2000. Néanmoins, l'introduction d'un deuxième événement dans le processus d'estimation, dans le but de construire progressivement un profil en travers, n'a pas conduit à une amélioration sensible de la simulation des étendues inondées. Cela peut être dû au fait que, quel que soit l'événement considéré, le débit aval Q_{av} n'est pas identifié (cf. Tab. 8.5) : lors de la reconstitution à partir d'un seul événement (§ 8.2), parmi les paramètres invariants en x , seule la valeur de la condition aval H_{av} a évolué au cours de la minimisation.

		Paramètre	Étape n°1 (§ 8.2)	Étape n°2 (§ 8.3)
Paramètres invariants en x	Hydraulique	Débit aval	Estimé	Résultat de l'étape n°1
		Débit d'apport	Estimé	Résultat de l'étape n°1
		Condition aval	Estimée	Résultat de l'étape n°1
	Géométrique	Strickler lit mineur	Estimé	Résultat de l'étape n°1
		Strickler lit majeur	Estimé	Résultat de l'étape n°1
		Pente du fond du lit	Connue	Connue
Paramètres fonction de x	Lit mineur	Largeur du lit, rive gauche	Connue	Connue
		Largeur du lit, rive droite	Connue	Connue
		Profondeur, rive gauche	Estimée	Résultat de l'étape n°1
		Profondeur, rive droite	Estimée	Résultat de l'étape n°1
		Pente transversale, rive gauche	Estimée	Résultat de l'étape n°1
		Pente transversale, rive droite	Estimée	Résultat de l'étape n°1
	Lit majeur	1 ^{ère} pente transversale, rive gauche	Estimée	Résultat de l'étape n°1
		1 ^{ère} pente transversale, rive droite	Estimée	Résultat de l'étape n°1
		Hauteur de changement de pente, rive gauche	-	Estimée
		Hauteur de changement de pente, rive droite	-	Estimée
		2 ^{ème} pente transversale, rive gauche	-	Estimée
		2 ^{ème} pente transversale, rive droite	-	Estimée

TAB. 8.14 – Récapitulatif des paramètres connus et optimisés (étapes n°1 et 2), cas de la Lèze

Une telle constatation semble indiquer que la minimisation est fortement conditionnée par ce paramètre. Étant donné que débit aval Q_{av} et hauteur aval H_{av} sont corrélés, une solution pour éviter ce phénomène serait de se donner une relation hauteur/débit $H_{av} = H_{av}(Q_{av})$, de type loi d'ouvrage, à la limite aval. En effet, lorsque, dans l'analyse de sensibilité, la valeur de la condition aval H_{av} est fixée à la valeur optimale résultant de la minimisation, la sensibilité du modèle au débit Q_{av} augmente. Tenir compte des interactions entre Q_{av} et H_{av} dans le procédé de minimisation pourrait donc permettre de reconstituer le débit.

Synthèse sur les deux sites d'étude

Ces premiers résultats, sur les deux sites de l'Aisne et de la Lèze, sont encourageants. La reconstitution d'une rivière équivalente à partir d'un jeu d'observations donne de bons résultats. En transférant la calibration obtenue entre deux événements différents, l'erreur relative sur les grandeurs simulées δ_B reste inférieure à 7 %, pour la zone 3 de la Lèze. Toutefois, en reconstituant graduellement le profil en travers à partir de deux événements, la simulation de la zone inondée obtenue ne présente pas de nette amélioration par rapport à la reconstitution à partir d'un seul événement, la minimisation étant visiblement conditionnée par la condition aval H_{av} .

L'introduction de la topographie du lit majeur, réalisée sur l'Aisne, n'a pas donné de résultat satisfaisant. Cette approche a néanmoins mis en évidence la nécessité d'introduire dans la modélisation de l'écoulement des phénomènes plus complexes, jusque-là négligés. Elle a également confirmé l'importance de la précision de la topographie du lit majeur dans la simulation des écoulements débordants.

Un certain nombre d'étapes seraient à présent nécessaires à la validation de la méthode :

- Introduire une relation $H_{av} = H_{av}(Q_{av})$ à la limite aval, plutôt que de laisser varier la condition aval H_{av} indépendamment du débit aval Q_{av} , ce qui conditionne trop fortement la minimisation,
- Tester la portabilité de la géométrie reconstituée sur un site pour lequel les caractéristiques hydrauliques des différents événements sont connues, et non pas issues d'une première étape d'assimilation comme c'est le cas ici,
- Comparer les simulations, réalisées à partir des paramètres reconstitués, à des simulations effectuées à l'aide de mesures in situ,
- Évaluer de façon systématique l'incertitude résultante sur les grandeurs simulées, au moyen de la méthode GLUE. Sur un site pour lequel les caractéristiques hydrauliques des différents événements sont connues, il serait également possible de mettre à jour les marges d'incertitude en présence de nouvelles observations (cf. § 2.3.2.6), et donc de mieux quantifier l'apport de ces nouvelles observations dans le processus de calibration (cf. § 2.3.2.7).

Conclusions et perspectives

Dans les domaines reliés aux géosciences, l’assimilation de données a déjà montré son efficacité, notamment en matière de prévision météorologique, ainsi qu’en océanographie. En hydrologie, elle permet d’approcher des paramètres physiques qui ne sont pas toujours accessibles au moyen de mesures. Son application dans les problèmes d’écoulements de fluides géophysiques est de plus en plus fréquente et a déjà donné de nombreux résultats satisfaisants (Bertino, 2001; Ferraresi *et al.*, 1996; Ngnepieba, 2001, ...).

L’objectif de cette étude était de tester la possibilité de pallier le manque d’information auquel se heurte la modélisation hydraulique, notamment par l’intégration de données issues de la télédétection, en s’appropriant des techniques d’assimilation de données.

Les résultats de la démarche des expériences jumelles, développée dans la deuxième partie, sont encourageants. Dans les différentes configurations examinées, relativement simples il est vrai, il a été possible d’obtenir des estimations correctes, c’est-à-dire des estimations permettant de simuler les largeurs de la zone inondée avec une précision inférieure à 1 % dans le cas d’écoulements complètement débordants. Cette constatation est valable aussi bien pour des paramètres constants en temps et en espace (comme les coefficients de Strickler et les paramètres géométriques, au chapitre 4), que pour des paramètres variants dans le temps (comme le débit amont, au chapitre 5).

En cherchant à appliquer cette méthode sur des sites réels, lorsque peu ou pas de données sont disponibles, même en utilisant un modèle d’écoulement très simple, la difficulté principale reste la sur-paramétrisation, aboutissant au problème d’équifinalité : à une modélisation donnée pourraient correspondre plusieurs jeux de paramètres également acceptables. En outre, ces jeux de paramètres pourraient provenir de régions très différentes de l’espace des paramètres à estimer. Ici, cet obstacle a été contourné en montrant que les paramètres calibrés à partir d’un ou de deux événements permettaient de simuler un troisième événement de façon cohérente. Ce qui revient à dire que, si les paramètres estimés ne sont pas optimaux pour tous les événements, ils permettent en tout cas d’obtenir un résultat acceptable.

Il n’est pas pour autant envisageable, en l’absence complète d’informations, comme le cas s’est présenté ici sur les deux sites d’étude, d’estimer tous les paramètres nécessaires à la modélisation de l’écoulement. L’espace des paramètres devient alors très grand et, le modèle hydrodynamique étant fortement non linéaire, les fonctions coûts possèdent très vraisemblablement plusieurs minima locaux, dans lesquels un algorithme de minimisation de type “local” est susceptible de rester bloqué. La minimisation, mise en oeuvre au cours du processus de calibration sur les sites de l’Aisne et de la Lèze, a paru fortement conditionnée par certains paramètres, les autres paramètres recherchés n’étant alors pas identifiés. Si la télédétection constitue une source de données potentielle en plein essor, elle n’est pour l’instant pas en mesure, à elle seule, de se substituer à l’ensemble des données traditionnelles.

Dans le cadre de cette étude, il est apparu que la reconstitution de quelques paramètres géométriques, en écoulement permanent, et d’un hydrogramme, en écoulement non permanent, donnait de bons résultats. En revanche, le bilan de l’estimation de l’ensemble des paramètres sur les sites d’étude n’est pas vraiment convainquant : certains paramètres, comme le débit ou les coefficients de Strickler, ne sont pas identifiés. A la lumière de ces résultats, il semble qu’il faille envisager une procédure d’assimilation en plusieurs étapes :

- Commencer par estimer une géométrie simplifiée du cours d’eau, comme la géométrie équivalente des chapitres 7 et 8, de préférence à partir d’un événement dont les caractéristiques hydrauliques seraient bien documentées. Le fait de connaître l’hydraulique de la crue permettrait de s’affranchir de ces paramètres pour se concentrer sur la reconstitution des profils en travers,

- Construire progressivement les profils en travers, comme ébauché au paragraphe (8.3), chaque nouvel événement assimilé permettant ainsi de rapprocher le profil équivalent initial d'un profil en travers plus réaliste,
- Estimer les caractéristiques hydrauliques d'un événement, en prenant comme géométrie du cours d'eau celle reconstituée au préalable.

La poursuite de l'étude peut être envisagée par différentes voies :

- Travailler sur la méthode d'optimisation, en particulier sur la géométrie de la fonction coût, en cherchant une adimensionnalisation plus adaptée que celles étudiées ici. De plus, étant donné que les paramètres à estimer sont des variables physiques hétérogènes, il pourrait être judicieux de préconditionner¹ le processus de minimisation. En effet, lorsque le problème est mal conditionné, certaines combinaisons linéaires des paramètres sont mal identifiées, ce qui s'est produit ici sur les sites d'études (cf. chapitres 7 et 8). Une autre piste de recherche dans ce domaine serait de rajouter à la fonction coût un terme d'ébauche permettant de guider la minimisation,
- Mettre en oeuvre d'une analyse approfondie de sensibilité du modèle aux paramètres à estimer : ne pas s'arrêter au premier ordre mais étudier également les corrélations entre les différents paramètres, afin de réduire l'espace des paramètres en se basant sur les résultats obtenus, comme suggéré par [Binley et al. \(1991\)](#) :

Sensitivity analysis suggests that the simulations are very much more sensitive to some parameters than to others. This knowledge has been used to reduce the parameter optimization problem, so that only four parameters were calibrated by comparing observed and simulated discharges, while the other parameters required were fixed on the basis of field estimates ([Binley et al., 1991](#)).

- Tester la sensibilité de l'estimation obtenue au type d'observations considéré (Largeur de la zone inondée, cote d'eau, ...). En effet, le principe même de l'étude est facilement adaptable aux nouvelles données que les progrès de la télédétection vont rendre accessibles dans un avenir proche, notamment dans le domaine de l'altimétrie ([Smith, 1997](#)) : les missions altimétriques (§ 1.5) ont déjà permis de mesurer des séries temporelles de niveaux d'eau sur les très grands fleuves comme l'Amazone à partir de TOPEX/POSEIDON ([Maheu et al., 2003](#)). En disposant des cotes d'eau, en plus des largeurs au miroir déjà étudiées, le problème d'assimilation pourrait être formulé dans un contexte multicritère où plusieurs fonctions coûts, une relative aux largeurs, l'autre aux cotes, seraient minimisées simultanément. Dans ce cadre, il serait alors possible de mieux adapter le calage des paramètres à la fonction que doit remplir le modèle hydraulique ([Madsen, 2003](#)) : gestion du risque inondation, par exemple, ou bien détermination de l'impact de la construction d'un ouvrage.

Toutefois, pour tester véritablement ces différentes possibilités sur un cas réel, il sera nécessaire de disposer, sur un site d'étude, non seulement d'un nombre suffisant d'observations (au moins trois événements, pour l'approche intitulée "Construction progressive du profil en travers", présentée au paragraphe (8.3)), mais encore de données hydrauliques et topographiques concernant ces événements, afin de pouvoir juger, par comparaison, de la validité des résultats obtenus.

¹Le préconditionnement est un changement de variables visant à améliorer la géométrie de la fonction coût.

Bibliographie

Bibliographie

- AHSAN, M. & O'CONNOR, K. M. 1994 A reappraisal of the kalman filtering technique, as applied in river flow forecasting. *J. of Hydrology* **161**, 197–226. [44](#), [46](#)
- ALQUIER, M., CHORDA, J., DARTUS, D., ESTUPINA, V., GUENNEC, B. L. & MAUBOURGUET, M.-M. 2000 Contribution des données d'observation de la terre à la cartographie de l'aléa. Rapport d'étude adema. Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. [157](#), [159](#)
- AUBERT, D., LOUMAGNE, C. & LE HÉGARAT MASCLE, S. 2001 Assimilation of soil moisture into hydrological models : the sequential method. In *5th International Workshop on Application of Remote Sensing in Hydrology*. Montpellier, France : National Water Research Institute, Canada. [46](#)
- BALTZER, R. A. & LAI, C. 1968 Computer simulation of unsteady flows in water ways. *J. Hydr. Div., ASCE* **94** (HY4), 1083–1117. [24](#)
- BARRETT, E. 1998 Satellite remote sensing in hydrometry. In *Hydrometry : Principles and Practices* (ed. H. Ed.), pp. 199–224. Chichester, UK : Wiley. [106](#)
- BATES, P., HORRITT, M. & HERVOUET, J.-M. 1998 Investigating two-dimensional, finite element predictions of floodplain using fractal generated topography. *Hydrol. Process.* **12**, 1257–1277. [28](#)
- BATES, P. D. & ANDERSON, M. 1996 A preliminary investigation into the impact of initial conditions on flood inundation predictions using a time / space distributed sensitivity analysis. *Catena* **26**, 115–134. [157](#), [159](#)
- BATES, P. D. & DE ROO, A. 2000 A simple raster-based model for flood inundation simulation. *J. of Hydrology* **236**, 54–77. [4](#), [14](#)
- BATES, P. D., HORRITT, M., SMITH, C. & MASON, D. 1997 Integrating remote sensing observations of flood hydrology and hydraulic modelling. *Hydrol. Process.* **11**, 1777–1795. [6](#), [26](#), [27](#), [28](#)
- BERTINO, L. 2001 Assimilation de données pour la prédiction de paramètres hydrodynamiques et écologiques : cas de la lagune de l'oder. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris. [59](#), [187](#)
- BEVEN, K. 1989a Changing ideas in hydrology - the case of physically-based models. *J. of Hydrology* **105**, 157–172. [48](#)
- BEVEN, K. 2001 How far can we go in distributed hydrological modelling? *Hydrol. Earth System Sci.* **5** (1), 1–12. [32](#)
- BEVEN, K. 2004 Towards environmental models of everywhere : advances in modelling and data assimilation. In *British Hydrological Society International Conference 2004, Hydrology :*

- Science and Practice for the 21st Century*, , vol. 1, pp. 244–250. Imperial College London, UK : British Hydrological Society. [31](#), [32](#), [60](#)
- BEVEN, K. & BINLEY, A. 1992 The future of distributed models : model calibration and uncertainty prediction. *Hydrol. Process.* **6**, 179–198. [32](#), [48](#), [52](#), [53](#), [54](#), [56](#), [58](#)
- BEVEN, K. & FREER, J. 2001 Equifinality, data assimilation and uncertainty estimation in mechanistic modelling of complex environmental systems using the glue methodology. *J. of Hydrology* **249**, 11–29. [32](#), [33](#), [34](#), [53](#), [60](#)
- BEVEN, K. J. 1989*b* Interflow. In *Unsaturated flow in hydrological modelling* (ed. H. Morel-Seytoux). Dordrecht, Netherland : D. Reidel. [52](#)
- BINLEY, A. M., BEVEN, K. J., CALVER, A. & WATTS, L. G. 1991 Changing responses in hydrology : Assessing the uncertainty in physically based model predictions. *Water Resources Research* **27** (6), 1253–1261. [53](#), [188](#)
- BIRKETT, C. 1998 Contribution of the topex nasa radar altimeter to the global monitoring of large rivers and wetlands. *Water Resources Research* **34** (5), 1223–1239. [27](#)
- BJERKLIE, D. M., DINGMAN, S. L., VOROSMARTY, C. J., BOLSTER, C. H. & CONGALTON, R. G. 2003 Evaluating the potential for measuring river discharge from space. *J. of Hydrology* **278**, 17–38. [106](#)
- BÉLISLE, C. 2002 La loi du khi-deux, la loi t de student et la loi f de fisher. Notes de cours. Université de Laval. [87](#)
- BOUSMAR, D. & ZECH, Y. 1999 Momentum transfer for practical flow computation in compound channels. *J. Hydr. Eng., ASCE* **125** (7), 696–706. [22](#)
- BOUTTIER, F. & COURTIER, P. 1999 Data assimilation concepts and methods. Meteorological training course lecture series. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, available online [http ://www.ecmwf.int/newsevents/training/](http://www.ecmwf.int/newsevents/training/). [32](#), [37](#), [59](#), [86](#)
- CARLIER, M. 1982 *Hydraulique générale et appliquée*. Paris, France : Eyrolles. [11](#), [17](#), [19](#)
- CASTAINGS, W., LE DIMET, F.-X. & DARTUS, D. 2003 Assimilation de données in situ et télédétection pour la modélisation hydrologique. *Bulletin de la Société Française de Photogrammétrie et Télédétection* **172**, 50–61. [59](#)
- CETMEF 2001 *Hydraulique des cours d'eau : la théorie et sa mise en pratique*. [18](#)
- CHOW, V. 1959 *Open-channel Hydraulics*. New-York, USA : Mc Graw-Hill. [11](#), [16](#)
- DAOUAS, N. & RADHOUANI, M. 2000 Version étendue du filtre de kalman appliqué à un problème inverse de conduction de chaleur non linéaire. *Int. J. Therm.* **39**, 191–212. [46](#)
- DESROZIERS, G. 2001 Optimal estimation in meteorology. In *ALATNET Seminar*. Gourdon, France. [35](#), [39](#)
- DINGMAN, S. L. & SHARMA, K. P. 1997 Statistical development and validation of discharge equations for natural channels. *J. of Hydrology* **199**, 13–35. [106](#)
- DIREN MIDI-PYRÉNÉES 2001 Cartographie informative des zones inondables de midi-pyrénées. Available online [http ://www.environnement.gouv.fr/midi-pyrenees/](http://www.environnement.gouv.fr/midi-pyrenees/). [138](#), [141](#)
- EQUIPE PALM 1998 Etude de faisabilité du projet palm. Rapport interne. CERFACS. [42](#), [59](#)

- FEKETE, B., VOROSMARTY, C. & GRABS, W. 1999 Global composite runoff fields based on observed river discharge and simulated water balance. *Tech. Rep.* 22. WMO-Global Runoff Data Center, Koblenz, Germany. [106](#)
- FERRARESI, M., TODINI, E. & VIGNOLI, R. 1996 A solution to the inverse problem in ground-water hydrology based on kalman filtering. *J. of Hydrology* **175**, 567–581. [47](#), [187](#)
- FREAD, D. 1974 Numerical properties of implicit four-point finite difference equations of unsteady flow. NOAA Technical Memorandum NWS HYDRO-18. Hydrologic Research Laboratory, National Weather Service. [23](#)
- FREER, J., BEVEN, K. J. & AMBOISE, B. 1996 Bayesian estimation of uncertainty in runoff prediction and the value of data : an application of the glue approach. *Water Resources Research* **32** (7), 2161–2173. [48](#), [54](#), [55](#), [56](#), [58](#), [91](#), [121](#)
- GALLAND, J., GOUTAL, N. & HERVOUET, J.-M. 1991 Telemac - a new numerical model for solving shallow-water equations. *Advances in Water Resources* **14** (3), 138–148. [14](#)
- HADAMARD, J. 1932 *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris : Hermann. [33](#)
- HÖLM, E. V. 2003 Lecture notes on assimilation algorithms. Meteorological training course lecture series. European Center for Medium-Range Weather Forecasts, available online <http://www.ecmwf.int/newsevents/training/>. [40](#)
- HOLLINGSWORTH, A. & LONNBERG, P. 1986 The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. part i : The wind field. *Tellus* **38A**, 111–136. [59](#)
- HORNBERGER, G. M. & SPEAR, R. 1981 An approach to the preliminary analysis of environmental systems. *Journal of Environmental Management* **12**, 7–18. [48](#), [49](#), [50](#), [52](#), [56](#), [71](#), [91](#), [104](#)
- HORRITT, M. & BATES, P. 2002 Evaluation of 1d and 2d numerical models for predicting river flood inundation. *J. of Hydrology* **268**, 87–99. [14](#), [16](#)
- HOTEIT, I. 2001 Filtres de kalman réduits et efficaces pour l’assimilation de données en océanographie. Phd thesis, Université de Grenoble I. [34](#), [59](#)
- IDE, K., COURTIER, P., GHIL, M. & LORENC, A. 1997 Unified notation for data assimilation : Operational, sequential and variational. *J. Meteor. Soc. Japan* **75** **1** (B), 181–189. [34](#)
- INSTITUT FRANÇAIS DE L’ENVIRONNEMENT 2002 Catastrophes naturelles et plans de prévention des risques. *Les données de l’environnement* **73**. [5](#)
- KALMAN, R. 1960 A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Phys. Oceanogr.* **23**, 2541–2566. [44](#)
- KHATIBI, R. 1989 Mathematical open channel flow models and identification of their friction parameters. Phd thesis, Queen Mary and Westfield College, London University. [33](#)
- KHATIBI, R., WILLIAMS, J. & WORMLEATON, P. 1998 Identification problem of open-channel friction parameters. *J. Hydr. Div., ASCE* **123**. [88](#)
- KHATIBI, R., WORMLEATON, P. & WILLIAMS, J. 2001 Parameter quality conditions in open-channel inverse problems. *J. Hydr. Res.* **38** (6), 447–458. [33](#), [64](#), [65](#)

- KOBLINSKY, C., CLARKE, R., BRENNE, A. & FREY, H. 1993 Measurement of river level variations with satellite altimetry. *Water Resources Research* **29** (6), 1839–1848. [27](#), [28](#)
- LACAZE, B., MAILHES, C., MAUBOURGUET, M.-M. & TOURNERET, J.-Y. 1997 *Probabilités et Statistiques appliquées*, cépaduès edn. Toulouse, France. [50](#)
- LANGENDOEN, E. J. 2000 Concepts - conservational channel evolution and pollutant transport system. Research Report 16. United States Department of Agriculture-Agricultural Research Service, National Sedimentation Laboratory. [xi](#), [17](#), [20](#)
- LE DIMET, F.-X. & BLUM, J. 2002 Assimilation de données pour les fluides géophysiques. *Matapli, bulletin de liaison de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI)* **67**, 33–55. [43](#), [58](#), [59](#)
- LYN, D. A. & GOODWIN, P. 1987 Stability of a general preissmann scheme. *J. Hydr. Eng., ASCE* **113** (1), 16–28. [23](#)
- MADSEN, H. 2003 Parameter estimation in distributed hydrological catchment modelling using automatic calibration with multiple objectives. *Advances in Water Resources* **26**, 205–216. [188](#)
- MADSEN, H. & CAÑIZARES, R. 1999 Comparison of extended and ensemble kalman filters for data assimilation in coastal area modelling. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids* **31**, 961–981. [47](#), [60](#)
- MAHEU, C., CAZENAVE, A. & MECHOSO, C. R. 2003 Water level fluctuations in the plata basin (south america) from topex/poseidon satellite altimetry. *Geophysical Research Letters* **30** (3). [27](#), [188](#)
- MARKS, K. & BATES, P. D. 2000 Integration of high resolution topographic data with floodplain models. *Hydrological Processes* **14**, 2109–2122. [4](#)
- MASSART, S. 2003 Méthodologies de l'assimilation de données. application à la chimie atmosphérique et à la mécanique des structures. Thèse de doctorat, Centre Européen de Recherche et de Formation Avancées en Calcul scientifique (CERFACS), I.N.P.T. [35](#), [45](#)
- MCLAUGHLIN, D. 2002 An integrated approach to hydrologic data assimilation : interpolation, smoothing, and filtering. *Advances in Water Resources* **25**, 1275–1286. [33](#)
- MECHOSO, C. R. 2003 Hydroclimate of the plata basin in south america : a study based on altimeter data. In *Workshop on Hydrology from Space*. Toulouse, France : CNES. [27](#)
- METL/MATE 1996 *Cartographie des zones inondables : approche hydrogéomorphologique*, villes et territoires edn. Paris. [138](#)
- NASH, J. & SUTCLIFFE, J. 1970 River flow forecasting through conceptual models. part i - a discussion of principles. *J. of Hydrology* **10**, 282–290. [53](#), [66](#), [90](#), [121](#), [127](#)
- NGNEPIEBA, P. 2001 Assimilation de données et identification de paramètres : une application en hydrologie. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier (Grenoble I) et Université du Yaoundé. [43](#), [187](#)
- NICOLLET, G. & UAN, M. 1979 Ecoulements permanents à surface libre en lits composés. *La Houille Blanche* **1**, 21–30. [20](#), [21](#)
- PHAM, D. T., VERRON, J. & GOURDEAU, L. 1998 Filtres de kalman singuliers évolutifs pour l'assimilation de données en océanographie. *C.R. Acad. Sci. Paris, Sciences de la Terre et des Planètes* **326**, 255–260. [46](#)

- PREISSMANN, A. 1961 Propagation des intumescences dans les canaux et rivières. In *First Congress of the French Association for Computation*, pp. 433–442. Grenoble, France. [23](#)
- PRÉFECTURE DE LA RÉGION LANGUEDOC-ROUSSILLON 2003 Guide d'élaboration des plans de prévention des risques inondation en languedoc-roussillon. *Tech. Rep.*. Direction Régionale de l'Environnement Languedoc-Roussillon. [4](#)
- RACLOT, D. 2003a Méthodologie d'exploitation quantitative des photographies aériennes d'inondation de plaine. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, Sciences et Techniques du Languedoc. [xiii](#), [xviii](#), [4](#), [11](#), [15](#), [26](#), [133](#), [134](#), [135](#), [138](#)
- RACLOT, D. 2003b Télédétection des niveaux d'eau en plaine inondée. démarche d'analyse spatiale guidée par le fonctionnement hydraulique. *Bulletin de la Société Française de Photogrammétrie et Télédétection* **172**, 87–99. [28](#)
- RACLOT, D., PUECH, C., BLIN, C. & CORNET, J.-M. 2000 Guide méthodologique : intégration des photos aériennes d'inondation dans les modèles hydrauliques. Rapport d'étude. Cemagref/Engref, CETMEF. [xiii](#), [14](#), [134](#)
- ROMANOWICZ, R. & BEVEN, K. 2003 Estimation of flood inundation probabilities as conditioned on event inundation maps. *Water Resources Research* **39** (3), 1–12. [48](#)
- ROUX, H., RACLOT, D. & DARTUS, D. 2003 Méthodes d'assimilation de données d'observation de la terre appliquées à la reconstitution de paramètres hydrauliques. *Bulletin de la Société Française de Photogrammétrie et Télédétection* **172**, 40–49. [159](#)
- RUNGO, M. & OLESEN, K. W. 2003 Combined 1- and 2- dimensional flood modelling. In *4th Iranian Hydraulic Conference*. Shiraz, Iran. [14](#)
- SAVENIJE, H. 2003 The width of a bankfull channel ; lacey's formula explained. *J. of Hydrology* **276**, 176–183. [106](#)
- SCHULTZ, G. A. 1988 Remote sensing in hydrology. *J. of Hydrology* **100**, 239–265. [26](#)
- SHANNON, C. 1948 A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal* **27**, 379–423 ; 623–656. [56](#)
- SINGH, V. P. 2004 Flow routing in open channels : some recent advances. In *River Flow 2004, Second International conference on Fluvial Hydraulics* (ed. M. Greco, A. Carravetta & R. Della Morte). Naples, Italie : A.A. Balkema Publishers. [29](#)
- SMITH, L. C. 1997 Satellite remote sensing of river inundation area, stage, and discharge : a review. *Hydrol. Process.* **11**, 1427–1439. [26](#), [27](#), [106](#), [188](#)
- SORENSEN, H. 1985 Introduction. In *Kalman filtering : Theory and application* (ed. H. Sorenson). New York : IEEE. [44](#)
- SOROOSHIAN, S. & DRACUP, J. A. 1980 Stochastic parameter estimation procedures for hydrologic rainfall-runoff models : Correlated and heteroscedastic error cases. *Water Resources Research* **16** (2), 430–442. [52](#)
- SOROOSHIAN, S., GUPTA, V. K. & FULTON, J. L. 1983 Evaluation of maximum likelihood parameter estimation techniques for conceptual rainfall-runoff models : Influence of calibration data variability and length on model credibility. *Water Resources Research* **19** (1), 251–259. [52](#)

- STEWART, M., BATES, P., ANDERSON, M., PRICE, D. & BURT, T. 1999 Modelling floods in hydrologically complex lowland river reaches. *J. of Hydrology* **223**, 85–106. [4](#)
- SZYMKIEWICZ, R. 1993 Solution of the inverse problem for the saint venant equations. *J. of Hydrology* **147**, 105–120. [24](#), [200](#)
- THE MATHWORKS INC. 2002 Optimization toolbox, for use with matlab®. User's guide, version 2. The Mathworks. [44](#)
- TODINI, E. 1978 Mutually interactive state-parameter (misp) estimation. In *AGU Chapman Conf. on Application of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics and Water Resources* (ed. C. Chiu), pp. 135–151. Department of Civil Engineering, University of Pittsburgh, Pittsburgh. [47](#)
- U.S. ARMY CORPS OF ENGINEERS 1997 Hec-ras river analysis system. *Tech. Rep.* U.S.A.C.E., Hydrologic Engineering Center, <http://www.hec.usace.army.mil/software/hecras/hecras.html>. [14](#)
- WEBER, J. & MENÉNDEZ, A. 2004 Performance of lateral velocity distribution models for compound channel sections. In *River Flow 2004, Second International conference on Fluvial Hydraulics* (ed. M. Greco, A. Carravetta & R. Della Morte), , vol. 1, pp. 449–457. Naples, Italy : A.A. Balkema Publishers. [13](#)
- WERNER, M. 2001 Uncertainty in flood extent estimation due to uncertain parameters. In *XXIX IAHR Congress Proceedings*. Beijing, China. [148](#), [175](#)
- XIONG, L. & O'CONNOR, K. M. 2000 Analysis of the response surface of the objective function by the optimum parameter curve : how good can the optimum parameter values be? *J. of Hydrology* **234**, 187–207. [43](#), [48](#)

Annexes

Annexe A

Résolution des équations de Saint-Venant monodimensionnelles

Sommaire

A.1	Discrétisation des équations à l'aide du schéma de Preissmann . . .	200
A.1.1	Discrétisation de l'équation de continuité	200
A.1.2	Discrétisation et linéarisation de l'équation dynamique	201
A.2	Résolution des équations par la méthode du double balayage	205
A.2.1	Sens Amont \rightarrow Aval \rightarrow Amont	205
A.2.2	Sens Aval \rightarrow Amont \rightarrow Aval	207

Cette annexe présente un exemple de résolution possible des équations de Saint-Venant monodimensionnelles, dans le cas particulier où il n'y a ni débit d'apport, ni débit de fuite. Sont détaillés les étapes et les calculs nécessaires à l'application de :

- La méthode de différences finies utilisant le schéma de discrétisation de Preissmann, méthode abordée au paragraphe (1.4.2.1),
- La méthode dite du double balayage (§ 1.4.2.2), permettant de résoudre le système résultant de la discrétisation des équations (5.2).

La méthode employée dans cette étude pour résoudre des équations de Saint-Venant monodimensionnelles, sans débit d'apport, ni de fuite, est détaillée ci-dessous. Le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J \right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Parmi l'ensemble des méthodes disponibles, la méthode implicite, avec discrétisation des équations à l'aide du schéma de Preissmann, a été choisie, car elle présente les avantages d'être simple et robuste.

A.1 Discrétisation des équations à l'aide du schéma de Preissmann

Le schéma de Preissmann original discrétise toute fonction f du champ de l'écoulement, et ses dérivées spatiale et temporelle, en un point $P(x, t)$, de la façon suivante :

$$f|_P = \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} + f_j^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \frac{f_{j+1}^n + f_j^n}{2} \quad (\text{A.3})$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_P = \frac{1}{2} \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} \quad (\text{A.4})$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P = \theta \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \quad (\text{A.5})$$

j est l'indice spatial, n l'indice temporel et θ est le poids spatial. Le schéma de Preissmann est inconditionnellement stable pour $\theta > \frac{1}{2}$. [Szymkiewicz \(1993\)](#) préconise une valeur de $\theta = \frac{2}{3}$, c'est cette valeur qui sera utilisée ultérieurement dans cette étude.

Par la suite, les notations suivantes seront adoptées :

$$\begin{aligned} \Delta Q_{j+1} &= Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n \\ \Delta Q_j &= Q_j^{n+1} - Q_j^n \\ \Delta Z_{j+1} &= Z_{j+1}^{n+1} - Z_{j+1}^n \\ \Delta Z_j &= Z_j^{n+1} - Z_j^n \end{aligned}$$

A.1.1 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité de la masse est la suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Or, dans une section en travers, $\left. \frac{\partial S}{\partial H} \right|_x = B$, ce qui permet de réécrire l'équation précédente :

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.7})$$

D'où la discrétisation (n est l'indice temporel, j l'indice spatial) :

$$\begin{aligned}
& \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} + \\
& \left[\theta \frac{B_{j+1}^{n+1} + B_j^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \frac{B_{j+1}^n + B_j^n}{2} \right] \left[\frac{1}{2} \frac{Z_{j+1}^{n+1} - Z_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{Z_j^{n+1} - Z_j^n}{\Delta t} \right] = 0 \\
& \theta \Delta Q_{j+1} + \frac{\Delta x}{4\Delta t} (B_{j+1}^n + B_j^n) \Delta Z_{j+1} = \theta \Delta Q_j - \frac{\Delta x}{4\Delta t} (B_{j+1}^n + B_j^n) \Delta Z_j - (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \\
& \left. \begin{aligned} CG &= \theta \\ CH &= \frac{\Delta x}{4\Delta t} (B_{j+1}^n + B_j^n) \\ CI &= \theta \\ CJ &= -\frac{\Delta x}{4\Delta t} (B_{j+1}^n + B_j^n) \\ CK &= -(Q_{j+1}^n - Q_j^n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& CG \cdot \Delta Q_{j+1} + CH \cdot \Delta Z_{j+1} = CI \cdot \Delta Q_j + CJ \cdot \Delta Z_j + CK \quad (A.8)
\end{aligned}$$

A.1.2 Discrétisation et linéarisation de l'équation dynamique

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J \right) = 0 \quad (A.9)$$

La pente de la ligne d'énergie J est calculée à l'aide de la formule de Manning-Strickler (Eq. 1.11).

La relation précédente s'écrit alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) + gS \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{D^2} \right) = 0 \quad (A.10)$$

où D est la débitance ($m^3.s^{-1}$) : $D = K_s S R_H^{2/3}$, soit encore

$$Q|Q| + D^2 \times \left\{ \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{1}{gS} \times \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (QV) \right] \right\} = 0 \quad (A.11)$$

D'où la discrétisation (n est l'indice temporel, j l'indice spatial) :

$$\begin{aligned}
& \theta \frac{Q^2|_{j+1}^{n+1} + Q^2|_j^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \frac{Q^2|_{j+1}^n + Q^2|_j^n}{2} + \quad (I) \\
& \left[\theta \frac{D^2|_{j+1}^{n+1} + D^2|_j^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \frac{D^2|_{j+1}^n + D^2|_j^n}{2} \right] \times \quad (II) \\
& \left\{ \theta \frac{Z_{j+1}^{n+1} - Z_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Z_{j+1}^n - Z_j^n}{\Delta x} + \quad (III) \right. \\
& \left. \left[\frac{\theta}{2g} \left(S^{-1}|_{j+1}^{n+1} + S^{-1}|_j^{n+1} \right) + \frac{1 - \theta}{2g} \left(S^{-1}|_{j+1}^n + S^{-1}|_j^n \right) \right] \times \quad (IV) \right. \\
& \left. \left[\frac{1}{2} \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \quad (V) \right. \right. \\
& \left. \left. \theta \frac{(QV)_{j+1}^{n+1} - (QV)_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{(QV)_{j+1}^n - (QV)_j^n}{\Delta x} \right] \right\} = 0 \quad (VI)
\end{aligned}$$

L'équation est linéarisée terme par terme. Seuls les termes au premier ordre en ΔQ ou ΔZ sont conservés.

Terme (I)

$$\begin{aligned} Q^2 &= \theta \frac{Q^2|_{j+1}^{n+1} + Q^2|_j^{n+1}}{2} + (1 - \theta) \frac{Q^2|_{j+1}^n + Q^2|_j^n}{2} \\ &= \frac{\theta}{2} \left[Q^2|_{j+1}^{n+1} - Q^2|_{j+1}^n + Q^2|_j^{n+1} - Q^2|_j^n \right] + \frac{1}{2} \left[Q^2|_{j+1}^n + Q^2|_j^n \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^2|_{j+1}^{n+1} - Q^2|_{j+1}^n &= (Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n) (Q_{j+1}^{n+1} + Q_{j+1}^n) \\ &= \Delta Q_{j+1} (\Delta Q_{j+1} + 2Q_{j+1}^n) \\ &\cong 2Q_{j+1}^n \Delta Q_{j+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$Q^2 = \theta [Q_{j+1}^n \Delta Q_{j+1} + Q_j^n \Delta Q_j] + \frac{1}{2} [Q^2|_{j+1}^n + Q^2|_j^n]$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} CB_1 &= \frac{1}{2} [Q^2|_{j+1}^n + Q^2|_j^n] \\ CB_2 &= \theta Q_{j+1}^n \\ CB_3 &= \theta Q_j^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ CB_1 + CB_2 \cdot \Delta Q_{j+1} + CB_3 \cdot \Delta Q_j &= Q^2 \end{aligned} \quad (A.12)$$

Terme (II)

$$D^2 = \theta [D_{j+1}^n \Delta D_{j+1} + D_j^n \Delta D_j] + \frac{1}{2} [D^2|_{j+1}^n + D^2|_j^n]$$

Linéarisation :

$$D^{n+1} = D^n + \left. \frac{\partial D}{\partial Z} \right|^n \Delta Z + \left. \frac{\partial D}{\partial Q} \right|^n \Delta Q$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial Z} &= K_s \left(\frac{5}{3} \frac{\partial S}{\partial Z} \frac{S^{2/3}}{P^{2/3}} - \frac{2}{3} \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{S^{5/3}}{P^{5/3}} \right) \\ &= \frac{K_s R_H^{2/3}}{3} \left(5B - 2R_H \frac{\partial P}{\partial Z} \right) \\ \frac{\partial D}{\partial Q} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{2} [D^2|_{j+1}^n + D^2|_j^n] + \theta D_{j+1}^n \frac{K_s|_{j+1}^n R_H^{2/3}|_{j+1}^n}{3} \left(5B_{j+1}^n - 2 R_H|_{j+1}^n \frac{\partial P}{\partial Z}|_{j+1}^n \right) \Delta Z_{j+1} \\ &\quad + \theta D_j^n \frac{K_s|_j^n R_H^{2/3}|_j^n}{3} \left(5B_j^n - 2 R_H|_j^n \frac{\partial P}{\partial Z}|_j^n \right) \Delta Z_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} CC_1 &= \frac{1}{2} [D^2|_{j+1}^n + D^2|_j^n] \\ CC_4 &= \theta D_{j+1}^n \frac{K_s|_{j+1}^n R_H^{2/3}|_{j+1}^n}{3} \left(5B_{j+1}^n - 2 R_H|_{j+1}^n \frac{\partial P}{\partial Z}|_{j+1}^n \right) \\ CC_5 &= \theta D_j^n \frac{K_s|_j^n R_H^{2/3}|_j^n}{3} \left(5B_j^n - 2 R_H|_j^n \frac{\partial P}{\partial Z}|_j^n \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ CC_1 + CC_4 \cdot \Delta Z_{j+1} + CC_5 \cdot \Delta Z_j &= D^2 \end{aligned} \quad (A.13)$$

Terme (III)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z}{\partial x} &= \theta \frac{Z_{j+1}^{n+1} - Z_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Z_{j+1}^n - Z_j^n}{\Delta x} \\
 &= \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Z_{j+1} - \Delta Z_j) + \frac{1}{\Delta x} (Z_{j+1}^n - Z_j^n) \\
 \\
 \left. \begin{aligned} CD_1 &= \frac{1}{\Delta x} (Z_{j+1}^n - Z_j^n) \\ CD_4 &= \frac{\theta}{\Delta x} \\ CD_5 &= -\frac{\theta}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 CD_1 + CD_4 \cdot \Delta Z_{j+1} + CD_5 \cdot \Delta Z_j &= \frac{\partial Z}{\partial x} \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Terme (IV)

$$\frac{1}{Sg} = \frac{\theta}{2g} \left(\frac{1}{S} \Big|_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{S} \Big|_j^{n+1} \right) + \frac{1-\theta}{2g} \left(\frac{1}{S} \Big|_{j+1}^n + \frac{1}{S} \Big|_j^n \right)$$

Linéarisation :

$$\frac{1}{S} \Big|^{n+1} = \frac{1}{S} \Big|^n + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{S} \right) \Big|^n \Delta Z + \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{S} \right) \Big|^n \Delta Q$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{S} \right) \Big|^n &= -\frac{B^n}{S^2 \Big|^n} \\
 \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{1}{S} \right) \Big|^n &= 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Sg} = \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{S} \Big|_{j+1}^n + \frac{1}{S} \Big|_j^n \right) + \frac{\theta}{2g} \left(-\frac{B}{S^2} \Big|_{j+1}^n \Delta Z_{j+1} - \frac{B}{S^2} \Big|_j^n \Delta Z_j \right)$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} CH_1 &= \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{S} \Big|_{j+1}^n + \frac{1}{S} \Big|_j^n \right) \\ CH_4 &= -\frac{\theta}{2g} \frac{B}{S^2} \Big|_{j+1}^n \\ CH_5 &= -\frac{\theta}{2g} \frac{B}{S^2} \Big|_j^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 CH_1 + CH_4 \cdot \Delta Z_{j+1} + CH_5 \cdot \Delta Z_j &= \frac{1}{Sg} \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

Terme (V)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} (\Delta Q_{j+1} + \Delta Q_j)$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} CE_2 &= \frac{1}{2\Delta t} \\ CE_3 &= \frac{1}{2\Delta t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 CE_2 \cdot \Delta Q_{j+1} + CE_3 \cdot \Delta Q_j &= \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

Terme (VI)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(QV) &= \theta \frac{(QV)_{j+1}^{n+1} - (QV)_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{(QV)_{j+1}^n - (QV)_j^n}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[(QV)_{j+1}^n - (QV)_j^n \right] + \frac{\theta}{\Delta x} \left[(QV)_{j+1}^{n+1} - (QV)_j^{n+1} - (QV)_{j+1}^n + (QV)_j^n \right]\end{aligned}$$

Première linéarisation :

$$V^{n+1} = V^n + \left. \frac{\partial V}{\partial Z} \right|^n \Delta Z + \left. \frac{\partial V}{\partial Q} \right|^n \Delta Q$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{Q}{S} \right) \\ &= -\frac{QB}{S^2} \\ \frac{\partial V}{\partial Q} &= \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{Q}{S} \right) \\ &= \frac{1}{S}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(QV)_{j+1}^{n+1} - (QV)_j^{n+1} - (QV)_{j+1}^n + (QV)_j^n &= V_{j+1}^n \Delta Q_{j+1} - V_j^n \Delta Q_j \\ &\quad + \left(\frac{\Delta Q_{j+1}}{S_{j+1}^n} - \frac{Q_{j+1}^n B_{j+1}^n}{S_{j+1}^{2n}} \Delta Z_{j+1} \right) Q_{j+1}^{n+1} \\ &\quad - \left(\frac{\Delta Q_j}{S_j^n} - \frac{Q_j^n B_j^n}{S_j^{2n}} \Delta Z_j \right) Q_j^{n+1}\end{aligned}$$

Deuxième linéarisation :

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q$$

$$\begin{aligned}(QV)_{j+1}^{n+1} - (QV)_j^{n+1} - (QV)_{j+1}^n + (QV)_j^n &= V_{j+1}^n \Delta Q_{j+1} - V_j^n \Delta Q_j \\ &\quad + V_{j+1}^n \Delta Q_{j+1} - V_{j+1}^{2n} B_{j+1}^n \Delta Z_{j+1} \\ &\quad - V_j^n \Delta Q_j + V_j^{2n} B_j^n \Delta Z_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(QV) &= \frac{1}{\Delta x} \left[(QV)_{j+1}^n - (QV)_j^n \right] \\ &\quad + \frac{\theta}{\Delta x} \left[2V_{j+1}^n \Delta Q_{j+1} - 2V_j^n \Delta Q_j - V_{j+1}^{2n} B_{j+1}^n \Delta Z_{j+1} + V_j^{2n} B_j^n \Delta Z_j \right]\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}CF_1 &= \frac{1}{\Delta x} \left[(QV)_{j+1}^n - (QV)_j^n \right] \\ CF_2 &= \frac{2\theta}{\Delta x} V_{j+1}^n \\ CF_3 &= -\frac{2\theta}{\Delta x} V_j^n \\ CF_4 &= -\frac{\theta}{\Delta x} V_{j+1}^{2n} B_{j+1}^n \\ CF_5 &= -\frac{\theta}{\Delta x} V_j^{2n} B_j^n\end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$CF_1 + CF_2 \cdot \Delta Q_{j+1} + CF_3 \cdot \Delta Q_j + CF_4 \cdot \Delta Z_{j+1} + CF_5 \cdot \Delta Z_j = \frac{\partial}{\partial x}(QV) \quad (\text{A.17})$$

Finalement, en regroupant les différents termes, l'équation de quantité de mouvement discrétisée devient :

$$CB_1 + CB_2.\Delta Q_{j+1} + CB_3.\Delta Q_j + (CC_1 + CC_4.\Delta Z_{j+1} + CC_5.\Delta Z_j) \times \\ \{CD_1 + CD_4.\Delta Z_{j+1} + CD_5.\Delta Z_j + (CH_1 + CH_4.\Delta Z_{j+1} + CH_5.\Delta Z_j) \times \\ [CE_2.\Delta Q_{j+1} + CE_3.\Delta Q_j + CF_1 + CF_2.\Delta Q_{j+1} + CF_3.\Delta Q_j + CF_4.\Delta Z_{j+1} + CF_5.\Delta Z_j]\} = 0$$

Après linéarisation, l'expression de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} CL &= CB_2 + CC_1.CH_1.(CE_2 + CF_2) \\ CM &= CC_4.(CD_1 + CH_1.CF_1) + CC_1.(CD_4 + CH_1.CF_4 + CH_4.CF_1) \\ CN &= -[CB_3 + CC_1.CH_1.(CE_3 + CF_3)] \\ CO &= -[CC_5.(CD_1 + CH_1.CF_1) + CC_1.(CD_5 + CH_1.CF_5 + CH_5.CF_1)] \\ CP &= -[CB_1 + CC_1.(CD_1 + CH_1.CF_1)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$CL.\Delta Q_{j+1} + CM.\Delta Z_{j+1} = CN.\Delta Q_j + CO.\Delta Z_j + CP \quad (A.18)$$

A.2 Résolution des équations par la méthode du double balayage

La méthode dite du double balayage a été choisie pour la résolution du système d'équations (A.8) et (A.18). Cette méthode consiste, en partant d'une limite du bief où une loi de type

$$CR.\Delta Q + CS.\Delta Z = CT \quad (A.19)$$

est connue, à déterminer pour toutes les sections de calcul, à l'aide des équations (A.8) et (A.18), des relations dites d'impédance, de la forme :

$$CR_j.\Delta Q_j + CS_j.\Delta Z_j = CT_j \quad (A.20)$$

La première étape consiste à calculer les coefficients CR_j , CS_j et CT_j . La deuxième étape permet de déterminer les valeurs des inconnues du problème, Z et Q .

A.2.1 Sens Amont \rightarrow Aval \rightarrow Amont

Lorsqu'une condition à la limite amont du tronçon considéré est connue (Eq. A.21), un hydrogramme $Q(x = x_{am}, t)$, par exemple, la méthode démarre à l'amont du bief.

$$CR_{am}.\Delta Q_{am} + CS_{am}.\Delta Z_{am} = CT_{am} \quad (A.21)$$

Les équations (A.8) et (A.18) donnent :

$$\begin{cases} \Delta Q_j = \frac{1}{CI} (CG.\Delta Q_{j+1} + CH.\Delta Z_{j+1} - CJ.\Delta Z_j - CK) \\ \Delta Z_j = \frac{1}{CO - \frac{CN.CJ}{CI}} \left[\left(CL - \frac{CN.CG}{CI} \right) \Delta Q_{j+1} + \left(CM - \frac{CN.CH}{CI} \right) \Delta Z_{j+1} + (-CP + \frac{CN.CK}{CI}) \right] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta Z_j = \frac{1}{CN - \frac{CO.CJ}{CI}} \left(\left(CL - \frac{CO.CG}{CJ} \right) \Delta Q_{j+1} + \left(CM - \frac{CO.CH}{CJ} \right) \Delta Z_{j+1} + (-CP + \frac{CO.CK}{CJ}) \right) \\ \Delta Q_j = \frac{1}{CN - \frac{CO.CJ}{CI}} \left(\left(CL - \frac{CO.CG}{CJ} \right) \Delta Q_{j+1} + \left(CM - \frac{CO.CH}{CJ} \right) \Delta Z_{j+1} + (-CP + \frac{CO.CK}{CJ}) \right) \end{cases}$$

soit

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_j \\ \Delta Z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} GA_j & GB_j \\ GD_j & GE_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta Q_{j+1} \\ \Delta Z_{j+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} GC_j \\ GF_j \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

avec

$$\begin{aligned} GA_j &= \frac{CL.CJ - CO.CG}{CN.CJ - CO.CI} \\ GB_j &= \frac{CM.CJ - CO.CH}{CN.CJ - CO.CI} \\ GC_j &= \frac{-CP.CJ + CO.CK}{CN.CJ - CO.CI} \\ GD_j &= \frac{CL.CI - CN.CG}{CO.CI - CN.CJ} \\ GE_j &= \frac{CM.CI - CN.CH}{CO.CI - CN.CJ} \\ GF_j &= \frac{-CP.CI + CN.CK}{CO.CI - CN.CJ} \end{aligned}$$

Les relations ainsi obtenues (A.22) sont appelées relations de transfert. En les associant aux relations d'impédance (A.20), l'équation suivante est obtenue :

$$(CR_j.GA_j + CS_j.GD_j) \cdot \Delta Q_{j+1} + (CR_j.GB_j + CS_j.GE_j) \cdot \Delta Z_{j+1} = CT_j - (CR_j.GC_j + CS_j.GF_j)$$

Or

$$CR_{j+1} \cdot \Delta Q_{j+1} + CS_{j+1} \cdot \Delta Z_{j+1} = CT_{j+1}$$

d'où :

$$\begin{cases} CR_{j+1} &= CR_j.GA_j + CS_j.GD_j \\ CS_{j+1} &= CR_j.GB_j + CS_j.GE_j \\ CT_{j+1} &= CT_j - (CR_j.GC_j + CS_j.GF_j) \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

En partant de la limite amont du bief, les différentes étapes de la méthode du double balayage sont les suivantes :

- Premier balayage, de l'amont vers l'aval ("descente") : calcul des coefficients de la relation d'impédance (A.20) à l'aide de la condition à la limite amont (Eq. A.21) et des équations (A.23),
- A l'aval, résolution d'un système de deux équations : la relation d'impédance à la limite aval, dont les coefficients ont été calculés lors de la "descente" et la condition à la limite aval (Eq. A.24), à deux inconnues $Z(x = x_{av}, t)$ et $Q(x = x_{av}, t)$,

$$CR_{av} \cdot \Delta Q_{av} + CS_{av} \cdot \Delta Z_{av} = CT_{av} \quad (\text{A.24})$$

Un exemple de condition à la limite aval serait une loi de fonctionnement d'ouvrage, comme celle d'un déversoir à seuil épais en régime dénoyé :

$$Z_{av} = \left[\left(\frac{Q}{\mu_D L_{seuil} \sqrt{2g}} \right)^{2/3} + P \right] \times \cos(\arcsin(I)) \quad (\text{A.25})$$

- Second balayage, de l'aval vers l'amont ("remontée") : calcul des inconnues Z et Q aux points intérieurs du domaine :

$$\begin{cases} \Delta Z_j &= GD_j \cdot \Delta Q_{j+1} + GE_j \cdot \Delta Z_{j+1} + GF_j \\ \Delta Q_j &= \frac{CT_j - CS_j \cdot \Delta Z_j}{CR_j} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

A.2.2 Sens Aval → Amont → Aval

Il est également possible de partir de l'aval du tronçon, ce qui peut être utile pour modéliser un réseau ramifié, par exemple. Les équations (A.8) et (A.18) donnent :

$$\begin{cases} \Delta Q_{j+1} = \frac{1}{CG} (CI \cdot \Delta Q_j + CJ \cdot \Delta Z_j + CK - CH \cdot \Delta Z_{j+1}) \\ \Delta Z_{j+1} = \frac{1}{CM - \frac{CL \cdot CH}{CG}} [(CN - \frac{CL \cdot CI}{CG}) \Delta Q_j + (CO - \frac{CL \cdot CJ}{CG}) \Delta Z_j + (CP - \frac{CL \cdot CK}{CG})] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta Z_{j+1} = \frac{1}{CH} (CI \cdot \Delta Q_j + CJ \cdot \Delta Z_j + CK - CG \cdot \Delta Q_{j+1}) \\ \Delta Q_{j+1} = \frac{1}{CL - \frac{CM \cdot CG}{CH}} ((CN - \frac{CM \cdot CI}{CH}) \cdot \Delta Q_j + (CO - \frac{CM \cdot CJ}{CH}) \cdot \Delta Z_j + (CP - \frac{CM \cdot CK}{CH})) \end{cases}$$

D'où les relations de transfert :

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_{j+1} \\ \Delta Z_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FA_{j+1} & FB_{j+1} \\ FD_{j+1} & FE_{j+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta Q_j \\ \Delta Z_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} FC_{j+1} \\ FF_{j+1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

avec

$$\begin{aligned} FA_{j+1} &= \frac{CN \cdot CH - CM \cdot CI}{CL \cdot CH - CM \cdot CG} \\ FB_{j+1} &= \frac{CO \cdot CH - CM \cdot CJ}{CL \cdot CH - CM \cdot CG} \\ FC_{j+1} &= \frac{CP \cdot CH - CM \cdot CK}{CL \cdot CH - CM \cdot CG} \\ FD_{j+1} &= \frac{CN \cdot CG - CL \cdot CI}{CM \cdot CG - CL \cdot CH} \\ FE_{j+1} &= \frac{CO \cdot CG - CL \cdot CJ}{CM \cdot CG - CL \cdot CH} \\ FF_{j+1} &= \frac{CP \cdot CG - CL \cdot CK}{CM \cdot CG - CL \cdot CH} \end{aligned}$$

Les relations d'impédance s'expriment comme suit :

$$CR_{j+1} \cdot \Delta Q_{j+1} + CS_{j+1} \cdot \Delta Z_{j+1} = CT_{j+1} \quad (\text{A.28})$$

Les expressions (A.28) et (A.27) donnent :

$$\begin{aligned} (CR_{j+1} \cdot FA_{j+1} + CS_{j+1} \cdot FD_{j+1}) \cdot \Delta Q_j \\ + (CR_{j+1} \cdot FB_{j+1} + CS_{j+1} \cdot FE_{j+1}) \cdot \Delta Z_j &= CT_{j+1} - (CR_{j+1} \cdot FC_{j+1} + CS_{j+1} \cdot FF_{j+1}) \end{aligned}$$

Or

$$CR_j \cdot \Delta Q_j + CS_j \cdot \Delta Z_j = CT_j$$

d'où :

$$\begin{cases} CR_j &= CR_{j+1} \cdot FA_{j+1} + CS_{j+1} \cdot FD_{j+1} \\ CS_j &= CR_{j+1} \cdot FB_{j+1} + CS_{j+1} \cdot FE_{j+1} \\ CT_j &= CT_{j+1} - (CR_{j+1} \cdot FC_{j+1} + CS_{j+1} \cdot FF_{j+1}) \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

En partant de la limite aval du bief, les différentes étapes de la méthode du double balayage sont les suivantes :

- Premier balayage, de l'aval vers l'amont ("montée") : calcul des coefficients de la relation d'impédance (A.20) à l'aide de la condition à la limite aval (Eq. A.30) et des équations (A.29),

$$CR_{av} \cdot \Delta Q_{av} + CS_{av} \cdot \Delta Z_{av} = CT_{av} \quad (\text{A.30})$$

- A l’amont, résolution d’un système de deux équations : la relation d’impédance à la limite amont, dont les coefficients ont été calculés lors de la “montée” et la condition à la limite amont (Eq. A.31), à deux inconnues $Z(x = x_{am}, t)$ et $Q(x = x_{am}, t)$,

$$CR_{am} \cdot \Delta Q_{am} + CS_{am} \cdot \Delta Z_{am} = CT_{am} \quad (\text{A.31})$$

- Second balayage, de l’amont vers l’aval (“descente”), calcul des inconnues Z et Q aux point intérieurs du domaine :

$$\begin{cases} \Delta Q_{j+1} &= FA_{j+1} \cdot \Delta Q_j + FB_{j+1} \cdot \Delta Z_j + FC_{j+1} \\ \Delta Z_{j+1} &= \frac{CT_{j+1} - CR_{j+1} \cdot \Delta Q_{j+1}}{CS_{j+1}} \end{cases}$$

Annexe B

Cas d'un écoulement permanent : estimation de quatre paramètres

Sommaire

B.1 Minimisation de Φ_1, Φ_2 et Φ_3	210
B.1.1 Valeurs initiales des trois fonctions coûts	210
B.1.2 Valeurs finales des trois fonctions coûts	211
B.2 Pourcentages d'erreur sur les valeurs optimales	212
B.3 Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées	218
B.4 Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées	222
B.5 Analyse de sensibilité	230
B.5.1 Valeurs de vraisemblance	230
B.5.2 Densités de probabilité cumulatives	234

Cette annexe présente des résultats complémentaires, obtenus lors de l'estimation de quatre paramètres dans le cas d'un écoulement monodimensionnel permanent. Ces résultats concernent :

- l'estimation de paramètres proprement dite, avec les valeurs initiales et finales des trois fonctions coûts Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , les pourcentages d'erreur sur les valeurs optimales et sur les grandeurs simulées, ainsi que les intervalles de confiance de la moyenne, pour Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 et le filtre de Kalman étendu. Toutes ces valeurs sont des moyennes sur les 5 tirages effectués pour chaque niveau de bruit,
- l'analyse de sensibilité, avec les valeurs des fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f et les densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres K_s , I , H_{lim} et m_{maj} . Les figures et les valeurs exposées dans cette partie concernent les résultats obtenus à partir d'un tirage seulement dans chaque cas et sont données à titre d'exemple.

B.1 Minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3

B.1.1 Valeurs initiales des trois fonctions coûts

	Niveau de bruit σ	Cas n°1		Cas n°2	
		Jeu n°1	Jeu n°2	Jeu n°1	Jeu n°2
Φ_1 (m^2)	0.006	3.134×10^{10}	2.873×10^9	7.078×10^9	5.639×10^9
	0.012	3.134×10^{10}	2.873×10^9	7.078×10^9	5.639×10^9
	0.018	3.134×10^{10}	2.873×10^9	7.078×10^9	5.639×10^9
	0.024	3.134×10^{10}	2.873×10^9	7.078×10^9	5.640×10^9
	0.030	3.134×10^{10}	2.873×10^9	7.079×10^9	5.640×10^9
	0.036	3.134×10^{10}	2.873×10^9	7.079×10^9	5.641×10^9
Φ_2	0.006	6.746×10^5	3.282×10^4	2.192×10^3	1.819×10^3
	0.012	6.750×10^5	3.284×10^4	2.192×10^3	1.819×10^3
	0.018	6.752×10^5	3.285×10^4	2.192×10^3	1.819×10^3
	0.024	6.760×10^5	3.290×10^4	2.192×10^3	1.819×10^3
	0.030	6.767×10^5	3.296×10^4	2.192×10^3	1.820×10^3
	0.036	6.778×10^5	3.302×10^4	2.192×10^3	1.820×10^3
Φ_3	0.006	5.899×10^3	3.229×10^3	9.276×10^2	5.951×10^3
	0.012	5.900×10^3	3.229×10^3	9.276×10^2	5.951×10^3
	0.018	5.900×10^3	3.229×10^3	9.276×10^2	5.951×10^3
	0.024	5.900×10^3	3.230×10^3	9.276×10^2	5.952×10^3
	0.030	5.900×10^3	3.230×10^3	9.277×10^2	5.952×10^3
	0.036	5.900×10^3	3.231×10^3	9.277×10^2	5.952×10^3

TAB. B.1 – Valeurs de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 avant optimisation, correspondant aux jeux de valeurs initiales n°1 et 2

B.1.2 Valeurs finales des trois fonctions coûts

	Niveau de bruit σ	Cas n°1		Cas n°2	
		Jeu n°1	Jeu n°2	Jeu n°1	Jeu n°2
Φ_1 (m^2)	0.006	1.171×10^4	1.154×10^4	1.162×10^4	1.162×10^4
	0.012	4.653×10^4	4.684×10^4	4.636×10^4	4.636×10^4
	0.018	1.044×10^5	1.043×10^5	1.036×10^5	1.036×10^5
	0.024	1.831×10^5	1.827×10^5	1.850×10^5	1.850×10^5
	0.030	2.906×10^5	2.917×10^5	2.906×10^5	2.906×10^5
	0.036	4.150×10^5	4.149×10^5	4.123×10^5	4.123×10^5
Φ_2	0.006	1.030×10^3	0.379	0.004	0.004
	0.012	1.031×10^3	1.137	0.016	0.016
	0.018	1.032×10^3	2.006	0.036	0.036
	0.024	1.033×10^3	3.575	0.065	0.065
	0.030	1.035×10^3	5.590	0.101	0.101
	0.036	1.037×10^3	8.071	0.143	0.143
Φ_3	0.006	0.271	0.231	0.004	0.004
	0.012	0.893	142.9	0.016	0.016
	0.018	1.980	2.175	0.036	0.036
	0.024	3.482	3.520	0.065	0.065
	0.030	5.549	5.598	0.101	0.101
	0.036	7.8937	184.4	0.143	0.143

TAB. B.2 – Valeurs finales de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , après optimisation

B.2 Pourcentages d'erreur sur les valeurs optimales

Les tableaux suivants récapitulent les pourcentages d'erreur sur la valeur optimale des paramètres, pour les six niveaux de bruit. L'erreur relative $\delta_{\mathbf{x}}^a$ de l'analyse \mathbf{x}^a par rapport à l'état réel \mathbf{x}^t est définie par la formule suivante (cf. § 4.2.2) :

$$\delta_{\mathbf{x}}^a = \left\| \frac{\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t}{\mathbf{x}^t} \right\| \quad (\text{B.1})$$

L'erreur relative de l'initialisation de la minimisation \mathbf{x}^{init} (jeux n°1 et 2, Tab. 4.3), par rapport à l'état réel \mathbf{x}^t , est notée $\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}}$:

$$\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}} = \left\| \frac{\mathbf{x}^{\text{init}} - \mathbf{x}^t}{\mathbf{x}^t} \right\| \quad (\text{B.2})$$

Le filtre de Kalman étendu (EKF) n'a convergé pour aucun tirage dans le cas test n°2, en initialisant la procédure à partir du jeu de valeurs n°2.

	$\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	25.0 %	0.09 %	13.3 %	1.10 %	8.22 %
I	80.0 %	0.16 %	13.0 %	2.01 %	7.51 %
H_{lim}	16.7 %	0.01 %	20.6 %	0.15 %	0.47 %
m_{maj}	1.00 %	0.06 %	1.10 %	0.91 %	4.32 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	100 %	0.00 %	1.60 %	0.58 %	39.8 %
I	100 %	0.00 %	3.07 %	1.04 %	41.6 %
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.23 %	0.08 %	2.95 %
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	1.30 %	0.47 %	24.2 %

TAB. B.3 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.006$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	25.0 %	0.03 %	13.3 %	0.41 %	9.24 %
I	80.0 %	0.04 %	13.0 %	0.73 %	10.8 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	20.6 %	0.05 %	1.78 %
m_{maj}	1.00 %	0.04 %	1.10 %	0.32 %	8.66 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	100 %	0.02 %	2.27 %	6.31 %	50.4 %
I	100 %	0.04 %	4.27 %	34.6 %	48.9 %
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.33 %	10.0 %	3.42 %
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	2.00 %	6.32 %	29.1 %

TAB. B.4 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.012$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	25.0 %	0.04 %	13.3 %	0.10 %	6.35 %
I	80.0 %	0.08 %	13.0 %	0.17 %	3.65 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	20.6 %	0.02 %	0.44 %
m_{maj}	1.00 %	0.04 %	1.10 %	0.10 %	4.10 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	100 %	0.02 %	0.81 %	1.80 %	60.1 %
I	100 %	0.04 %	1.44 %	3.39 %	53.0 %
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.11 %	0.26 %	7.48 %
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	0.69 %	1.58 %	64.7 %

TAB. B.5 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.018$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	25.0 %	0.16 %	13.3 %	0.33 %	6.51 %
I	80.0 %	0.28 %	13.0 %	0.62 %	6.71 %
H_{lim}	16.7 %	0.02 %	20.6 %	0.04 %	0.51 %
m_{maj}	1.00 %	0.10 %	1.10 %	0.22 %	4.14 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	100 %	0.02 %	1.70 %	0.71 %	33.0 %
I	100 %	0.04 %	3.09 %	1.31 %	37.8 %
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.23 %	0.10 %	2.37 %
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	1.39 %	0.57 %	16.8 %

TAB. B.6 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.024$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	25.0 %	0.09 %	13.3 %	0.33 %	27.5 %
I	80.0 %	0.15 %	13.0 %	0.62 %	30.9 %
H_{lim}	16.7 %	0.01 %	20.6 %	0.05 %	2.39 %
m_{maj}	1.00 %	0.10 %	1.10 %	0.22 %	20.1 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	100 %	0.25 %	0.35 %	1.37 %	102 %
I	100 %	0.45 %	0.64 %	2.54 %	50.3 %
H_{lim}	50.0 %	0.03 %	0.04 %	0.19 %	4.77 %
m_{maj}	30.0 %	0.14 %	0.24 %	1.01 %	114 %

TAB. B.7 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.030$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	25.0 %	0.04 %	13.3 %	0.75 %	3.96 %
I	80.0 %	0.08 %	13.0 %	1.35 %	1.84 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	20.6 %	0.10 %	0.29 %
m_{maj}	1.00 %	0.00 %	1.10 %	0.57 %	2.88 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	100 %	0.00 %	1.18 %	0.45 %	32.2 %
I	100 %	0.01 %	2.19 %	69.6 %	35.7 %
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.16 %	15.6 %	2.12 %
m_{maj}	30.0 %	0.03 %	0.98 %	15.5 %	14.8 %

TAB. B.8 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.036$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.26 %
I	80.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.66 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.22 %
m_{maj}	1.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.63 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	33.3 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
I	100 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-

TAB. B.9 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.006$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.47 %
I	80.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.88 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.08 %
m_{maj}	1.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.08 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	33.3 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
I	100 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-

TAB. B.10 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.012$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	16.7 %	0.00 %	0.02 %	0.01 %	0.27 %
I	80.0 %	0.02 %	0.02 %	0.02 %	0.96 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.02 %
m_{maj}	1.00 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.12 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	33.3 %	0.00 %	0.02 %	0.01 %	-
I	100 %	0.02 %	0.02 %	0.02 %	-
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-

TAB. B.11 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.018$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.02 %	0.04 %
I	80.0 %	0.00 %	0.05 %	0.05 %	0.64 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.07 %
m_{maj}	1.00 %	0.02 %	0.02 %	0.01 %	0.28 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	33.3 %	0.00 %	0.00 %	0.02 %	-
I	100 %	0.05 %	0.05 %	0.05 %	-
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
m_{maj}	30.0 %	0.02 %	0.02 %	0.01 %	-

TAB. B.12 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.024$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	16.7 %	0.01 %	0.00 %	0.00 %	0.35 %
I	80.0 %	0.03 %	0.00 %	0.00 %	0.94 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	0.03 %
m_{maj}	1.00 %	0.00 %	0.01 %	0.00 %	0.05 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	33.3 %	0.01 %	0.00 %	0.00 %	-
I	100 %	0.03 %	0.00 %	0.00 %	-
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.00 %	0.00 %	-
m_{maj}	30.0 %	0.00 %	0.01 %	0.00 %	-

TAB. B.13 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.030$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	16.7 %	0.00 %	0.03 %	0.02 %	4.15 %
I	80.0 %	0.06 %	0.09 %	0.09 %	15.2 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.01 %	0.00 %	0.01 %
m_{maj}	1.00 %	0.01 %	0.00 %	0.02 %	0.77 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
K_s	33.3 %	0.00 %	0.03 %	0.02 %	-
I	100 %	0.06 %	0.09 %	0.09 %	-
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.01 %	0.00 %	-
m_{maj}	30.0 %	0.01 %	0.00 %	0.02 %	-

TAB. B.14 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.036$

B.3 Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées

Les erreurs relatives sur la largeur au miroir \mathbf{B}^a et la hauteur d'eau \mathbf{H}^a simulées à partir des valeurs optimales des paramètres sont calculées de la façon suivantes (§ 4.2.4.1) :

$$\delta_B^a = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \left[\frac{1}{1001} \sum_{j=1}^{1001} \left| \frac{\mathbf{B}^t|_j^k - \mathbf{B}^a|_j^k}{\mathbf{B}^t|_j^k} \right| \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\delta_H^a = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \left[\frac{1}{1001} \sum_{j=1}^{1001} \left| \frac{\mathbf{H}^t|_j^k - \mathbf{H}^a|_j^k}{\mathbf{H}^t|_j^k} \right| \right] \quad (\text{B.4})$$

k est l'indice de sommation sur les observations, j est l'indice spatial. Les exposants t et a désignent respectivement les grandeurs “vraies” (t pour “true”) et celles obtenues par résolution du modèle à partir des valeurs estimées des paramètres (a pour “analysed”). Les tableaux suivants donnent les valeurs de δ_B^a et δ_H^a pour tous les cas testés et pour tous les niveaux de bruit. EKF est l'abréviation de filtre de Kalman étendu, il n'a convergé pour aucun tirage dans le cas test n°2, en initialisant la procédure à partir du jeu de valeurs n°2.

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.02 %
		Φ_2	18.6 %	9.00 %
		Φ_3	0.12 %	0.22 %
		EKF	4.90 %	2.58 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.31 %	0.40 %
		Φ_3	0.04 %	0.11 %
		EKF	2.38 %	5.25 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	0.06 %	0.04 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	-	-

TAB. B.15 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.006$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	18.6 %	9.00 %
		Φ_3	0.03 %	0.08 %
		EKF	4.90 %	1.83 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.03 %
		Φ_2	0.40 %	0.53 %
		Φ_3	10.5 %	15.0 %
		EKF	1.64 %	7.97 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	0.03 %	0.05 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	-	-

TAB. B.16 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.012$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	18.6 %	9.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.02 %
		EKF	5.88 %	3.61 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.06 %	0.15 %
		Φ_3	0.34 %	0.43 %
		EKF	13.8 %	6.03 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	0.05 %	0.05 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	-	-

TAB. B.17 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.018$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	0.01 %	0.03 %
		Φ_2	18.6 %	9.00 %
		Φ_3	0.02 %	0.06 %
		EKF	3.91 %	1.80 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.16 %	0.33 %
		Φ_3	0.11 %	0.16 %
		EKF	1.60 %	4.99 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	0.05 %	0.02 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	-	-

TAB. B.18 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.024$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.01 %
		Φ_2	18.6 %	9.00 %
		Φ_3	0.03 %	0.07 %
		EKF	3.59 %	2.68 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.02 %	0.05 %
		Φ_2	0.03 %	0.07 %
		Φ_3	0.11 %	0.27 %
		EKF	10.2 %	5.67 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	0.03 %	0.04 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	-	-

TAB. B.19 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.030$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.01 %
		Φ_2	18.6 %	9.00 %
		Φ_3	0.05 %	0.14 %
		EKF	4.70 %	2.78 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.19 %	0.27 %
		Φ_3	11.6 %	19.6 %
		EKF	2.93 %	3.77 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	1.22 %	0.45 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.00 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.00 %
		EKF	-	-

TAB. B.20 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.036$

B.4 Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées

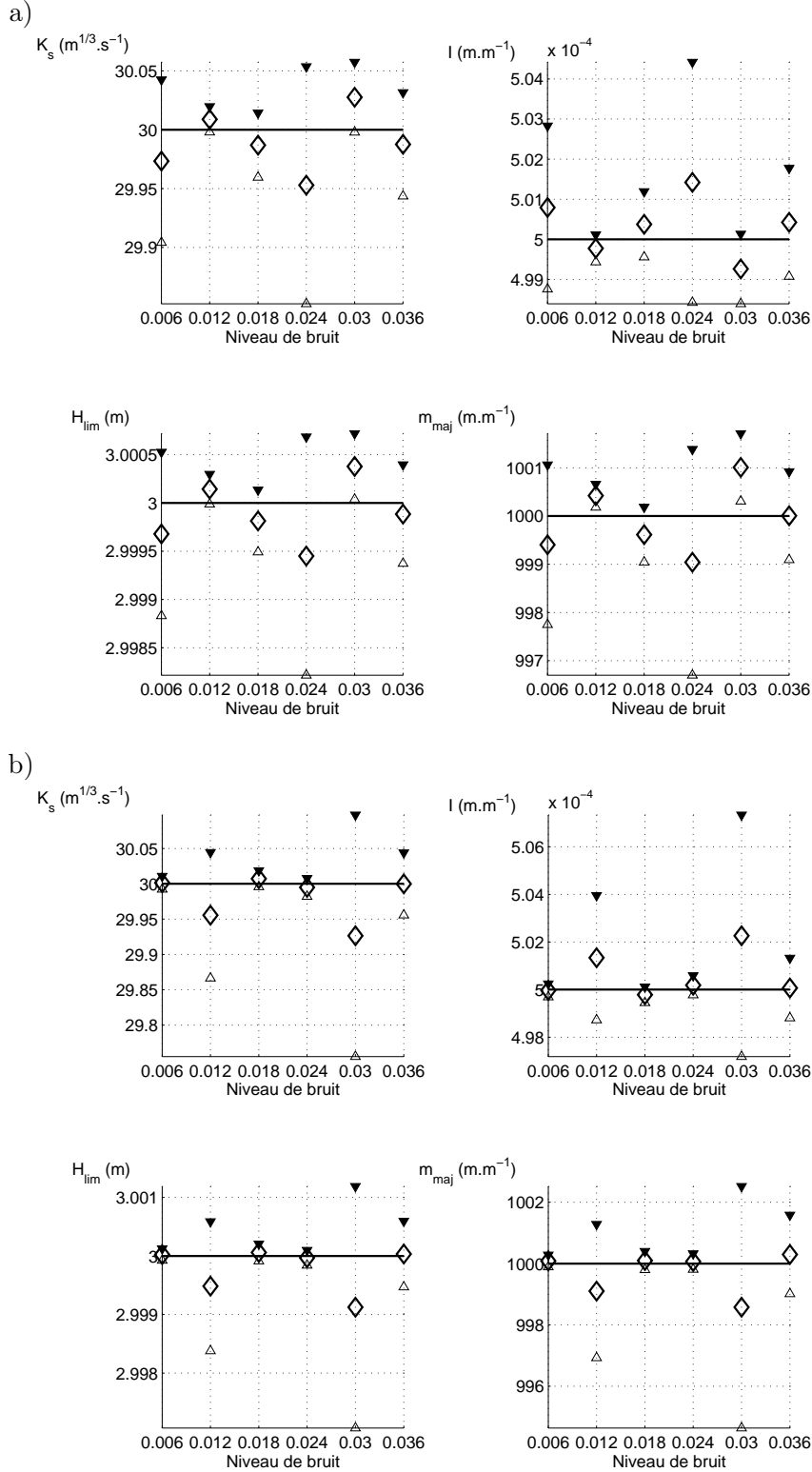


FIG. B.1 – Intervalles de confiance, \triangle borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \diamond valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , cas test n°1, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

Dans le cas test n°1, en initialisant l'algorithme de minimisation à l'aide du jeu de valeurs n°1, la fonction coût Φ_2 n'a pas donné de résultats satisfaisants. L'étalement des résultats obtenus pour chaque tirage est pratiquement nul et les valeurs estimées sont éloignées des valeurs vraies pour tous les paramètres, si bien qu'aucun des quatre intervalles de confiance ne contient la valeur vraie. La figure représentant intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées dans ce cas-là n'est donc pas présentée ici car elle n'apporte aucune information supplémentaire.

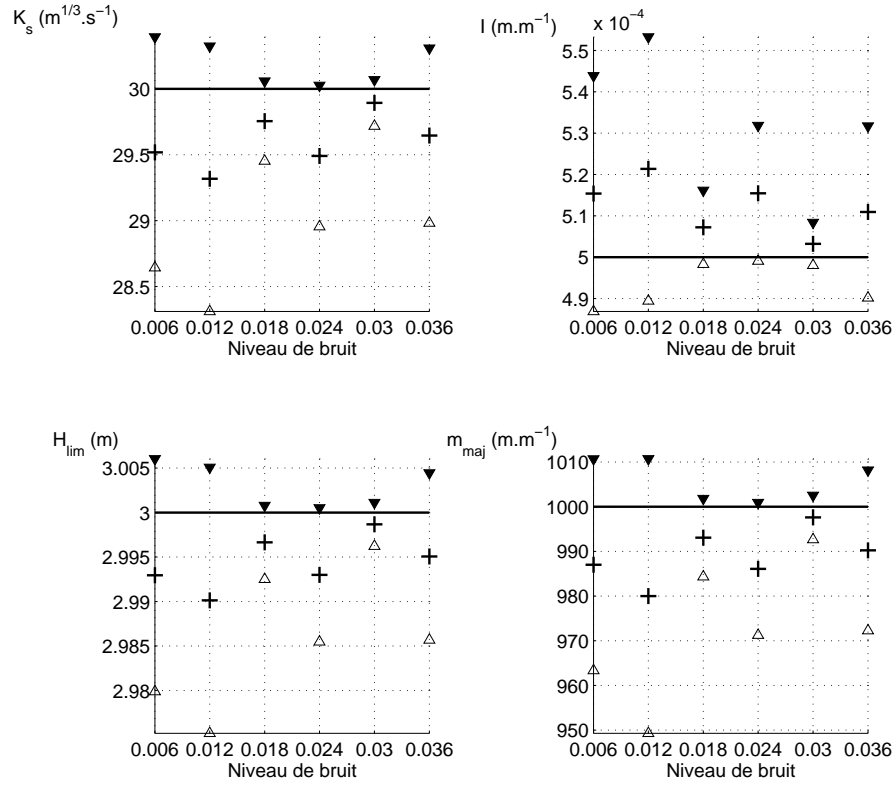


FIG. B.2 – Intervalles de confiance, \triangle borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et + valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_2 , cas test n°1, — Valeur vraie, jeu de valeurs initiales n°2

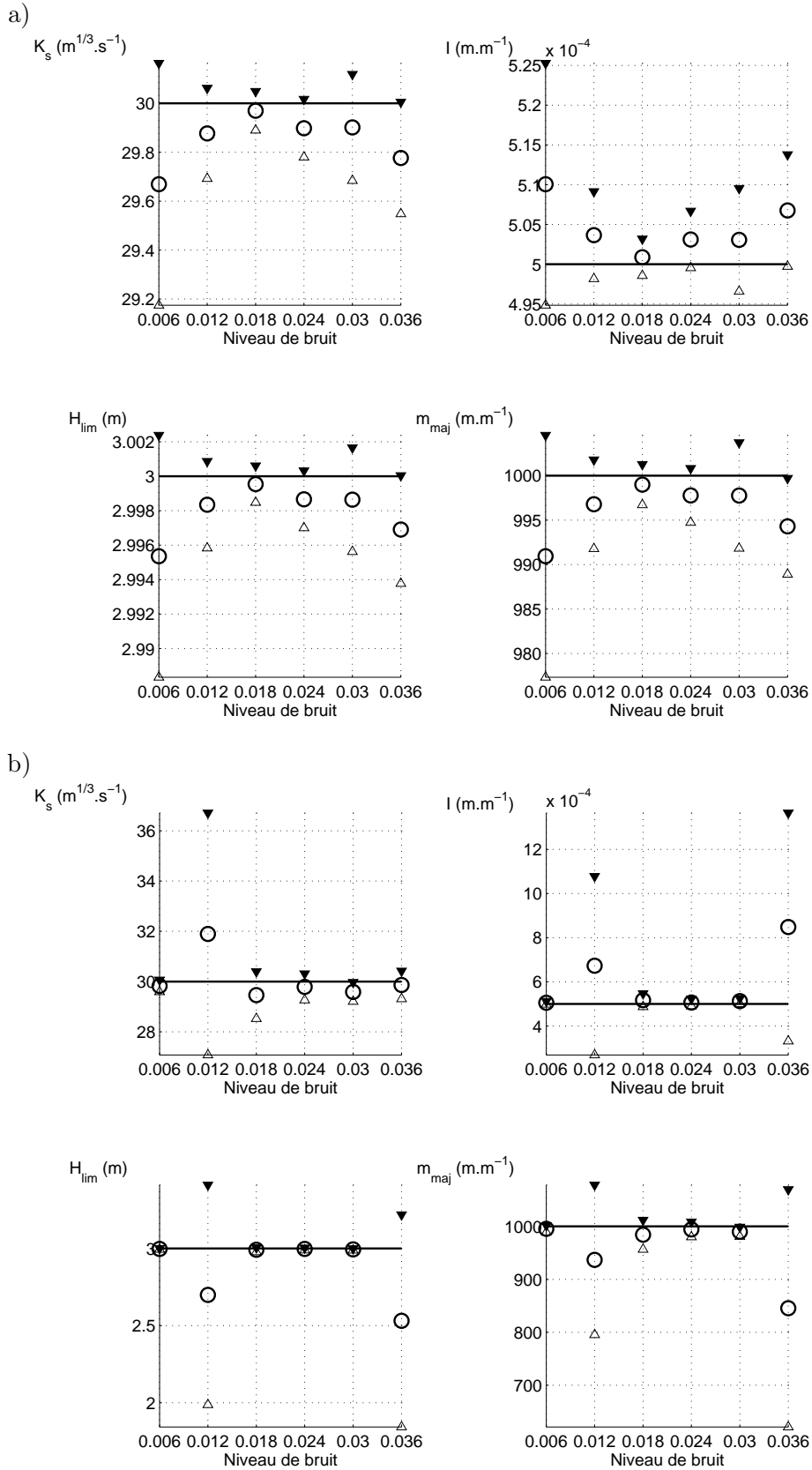


FIG. B.3 – Intervalles de confiance, Δ borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \bigcirc valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_3 , cas test n°1, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

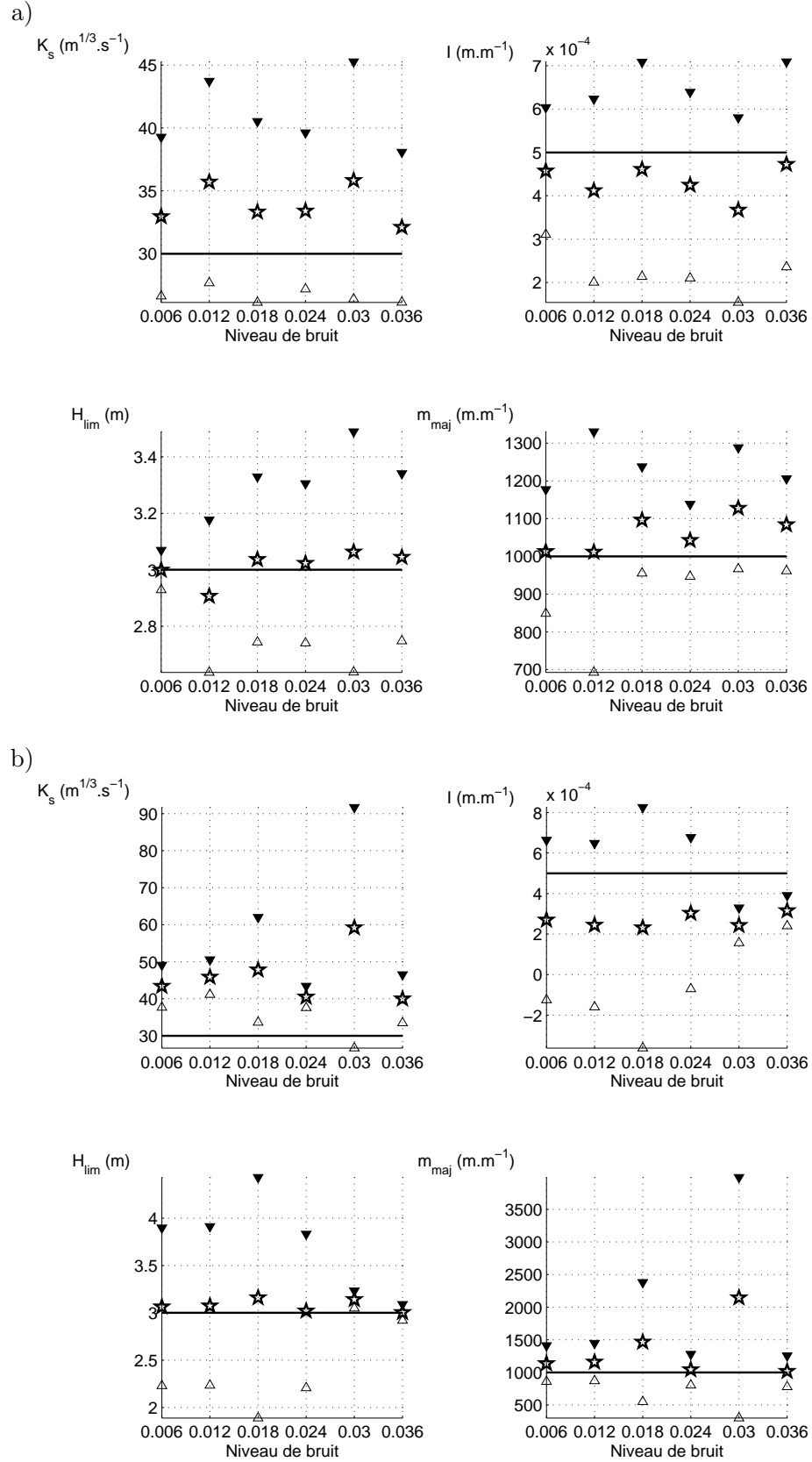


FIG. B.4 – Intervalles de confiance, \triangle borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \star valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, filtre de Kalman étendu, cas test n°1, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

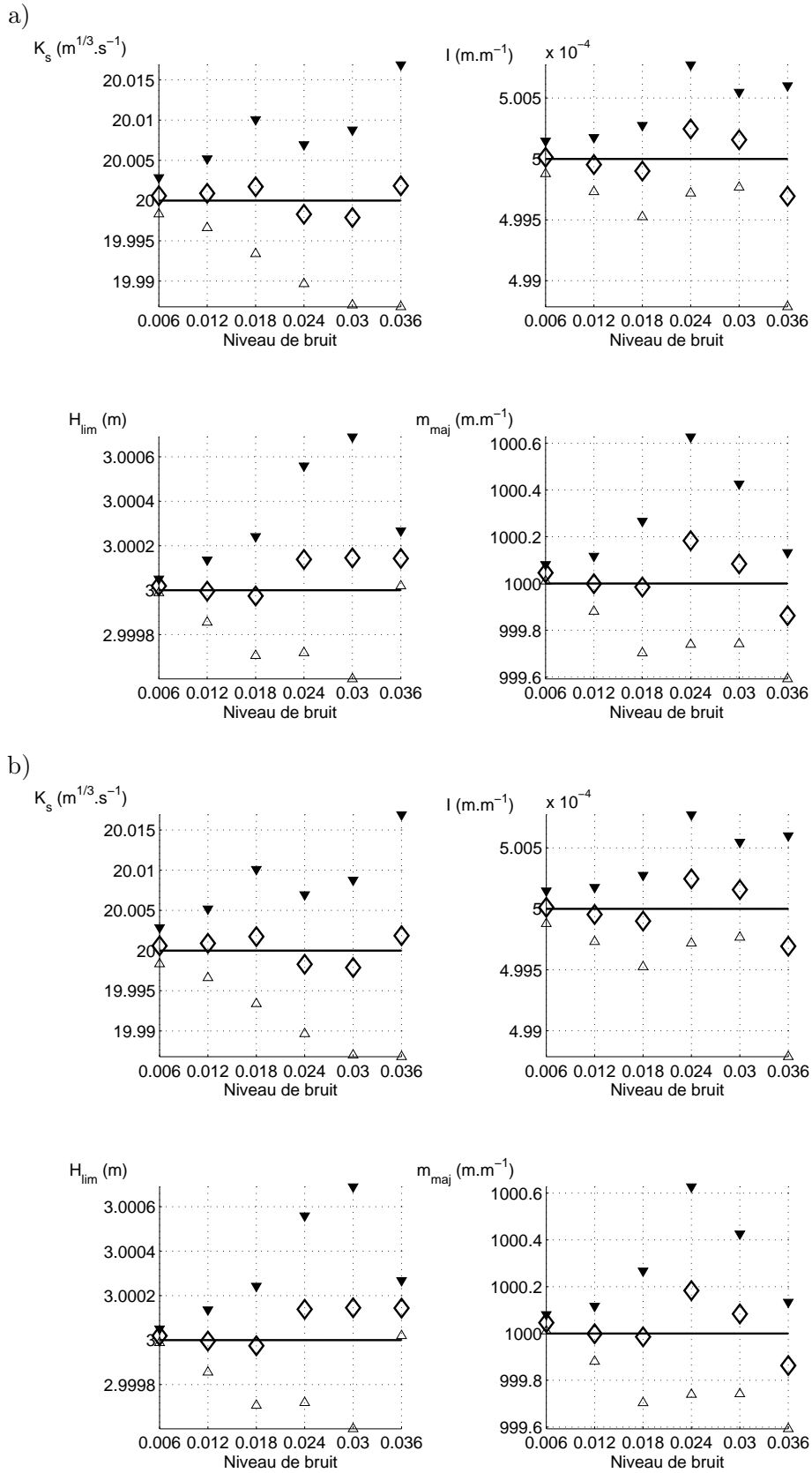


FIG. B.5 – Intervalles de confiance, \triangle borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \diamond valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , cas test n°2, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

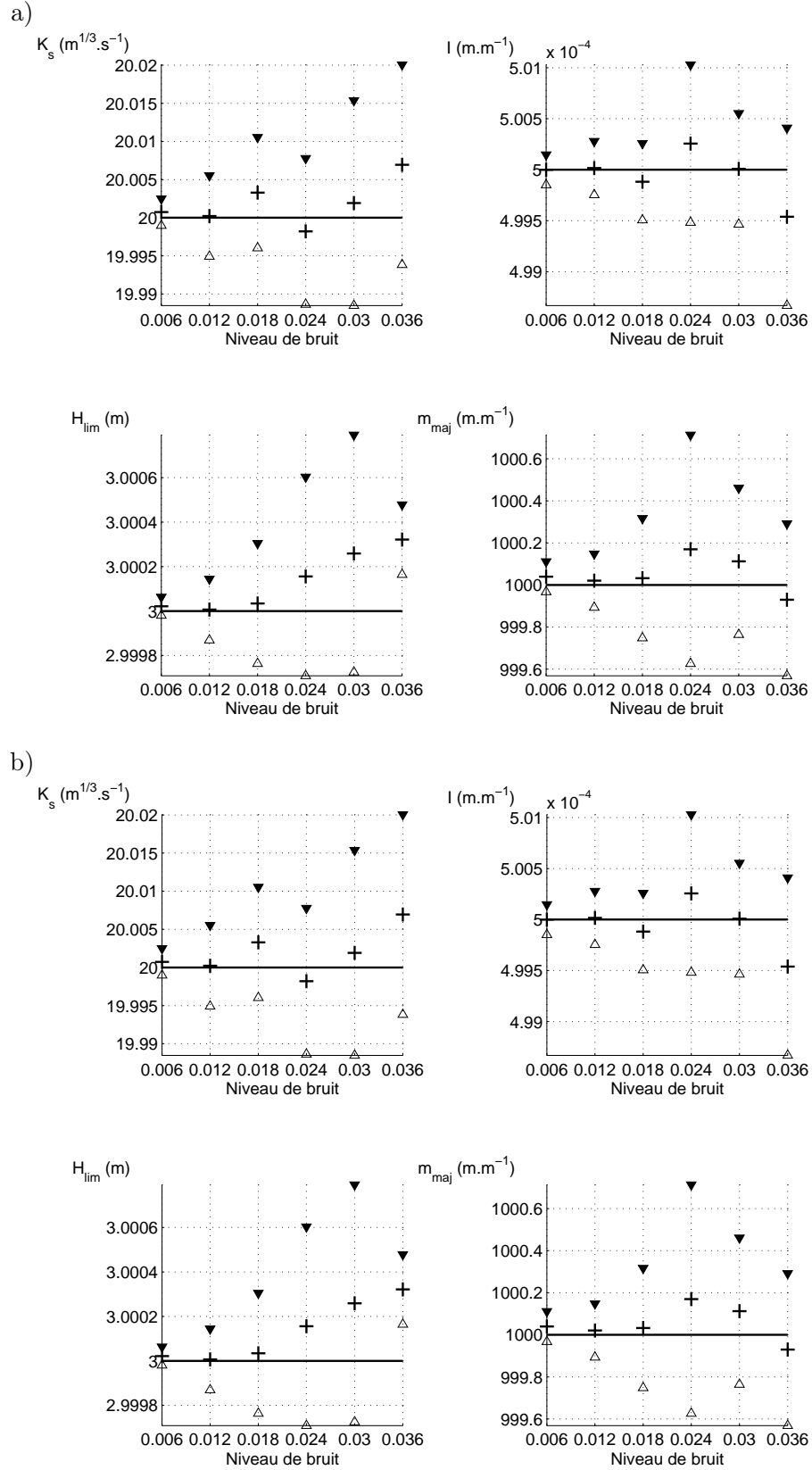


FIG. B.6 – Intervalles de confiance, Δ borne inférieure, ∇ borne supérieure, et $+$ valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_2 , cas test n°2, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

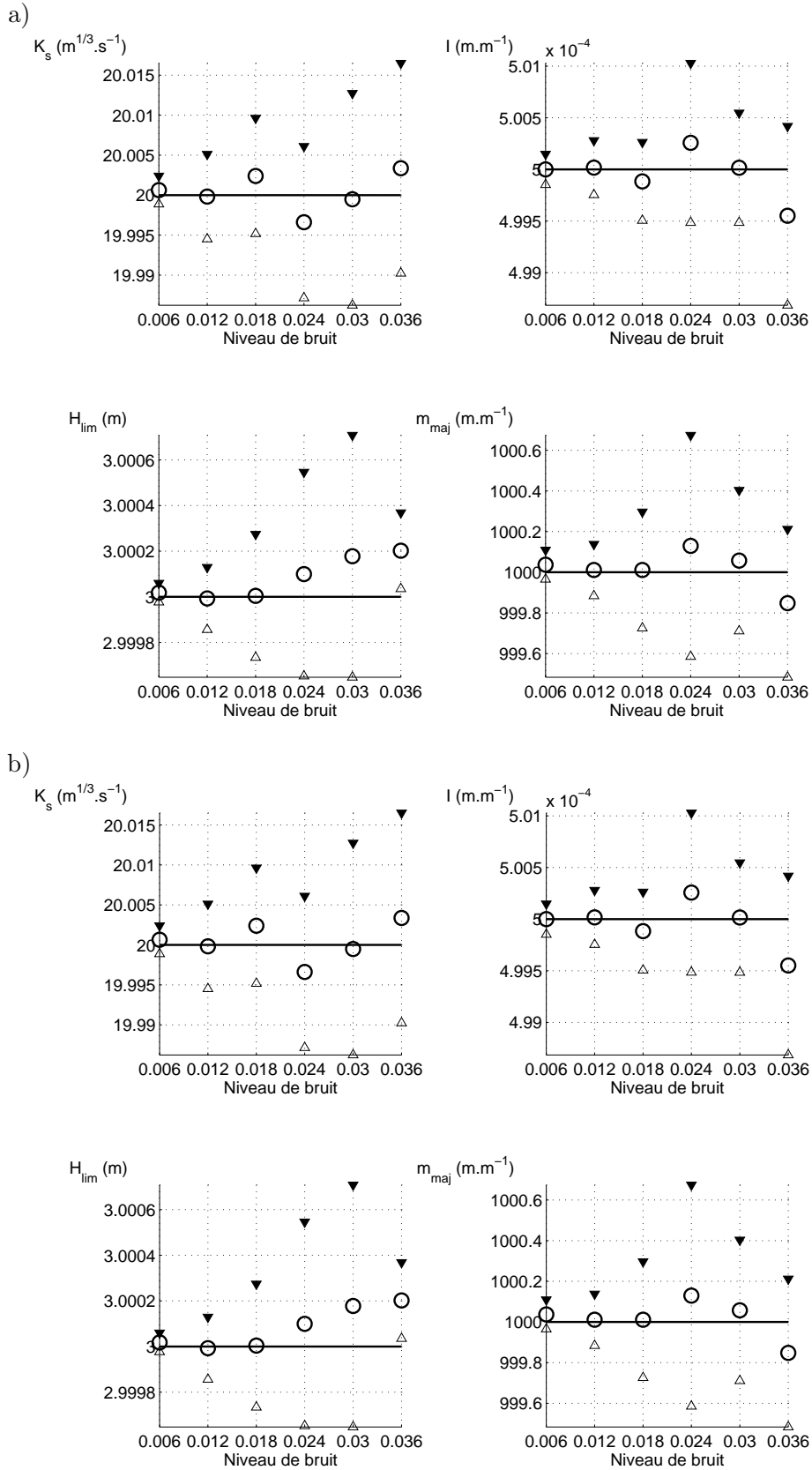


FIG. B.7 – Intervalles de confiance, Δ borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \bigcirc valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_3 , cas test n°2, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

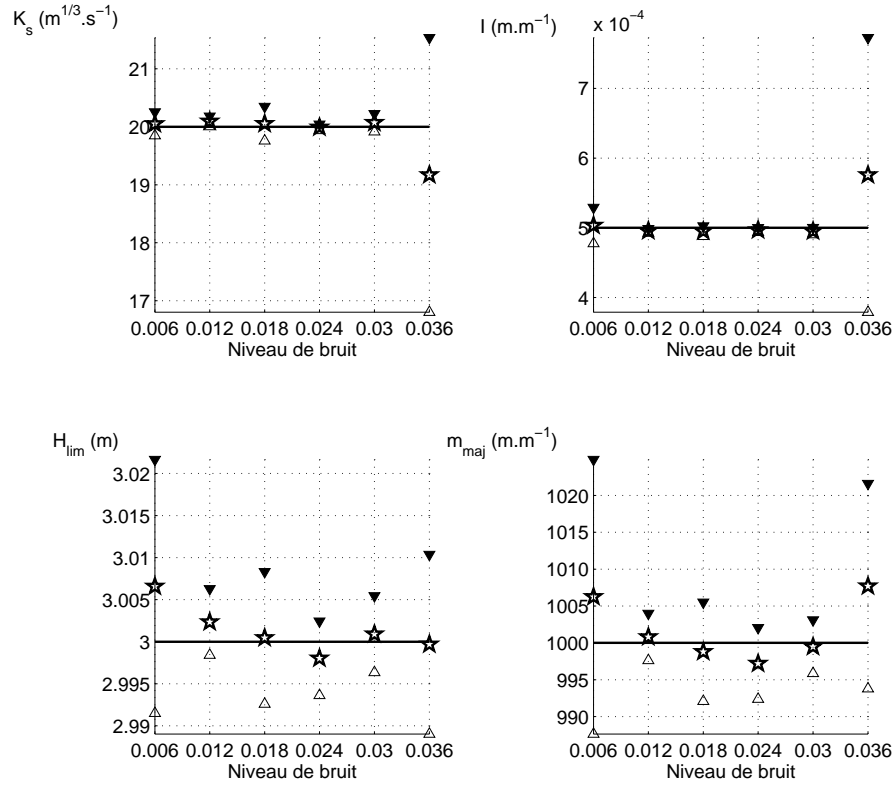


FIG. B.8 – Intervalles de confiance, \triangle borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \star valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, filtre de Kalman étendu, cas test n°2, — Valeur vraie, jeu de valeurs initiales n°1

Le filtre de Kalman étendu n'a convergé pour aucun tirage dans le cas test n°2, en initialisant la procédure à partir du jeu de valeurs n°2.

B.5 Analyse de sensibilité

B.5.1 Valeurs de vraisemblance

Les figures suivantes représentent les valeurs des fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f obtenues en fonction des quatre paramètres K_s , I , H_{lim} et m_{maj} , pour les cas tests n°1 et 2. Elles concernent les résultats obtenus à partir des observations suivantes :

- cas n°1 : $Q = 390 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage,
- cas n°2 : $Q = 200 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage.

Elles sont données à titre d'exemple, afin d'illustrer les remarques du paragraphe (4.2.6) qui se rapportent à l'ensemble des observations testées.

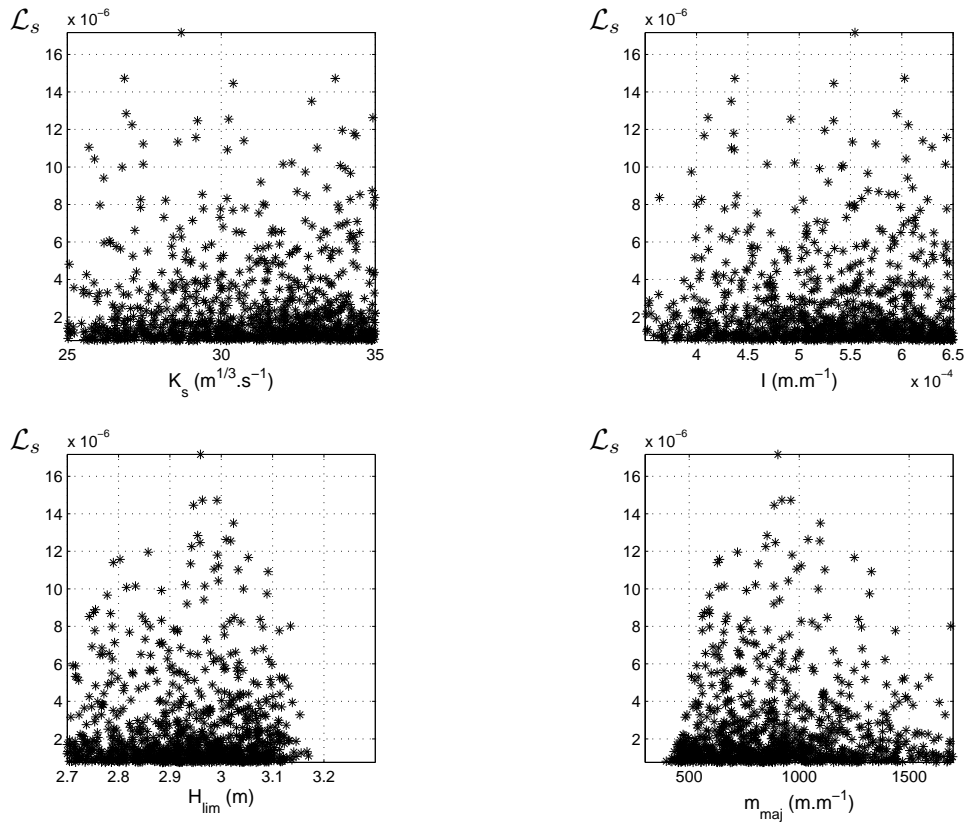
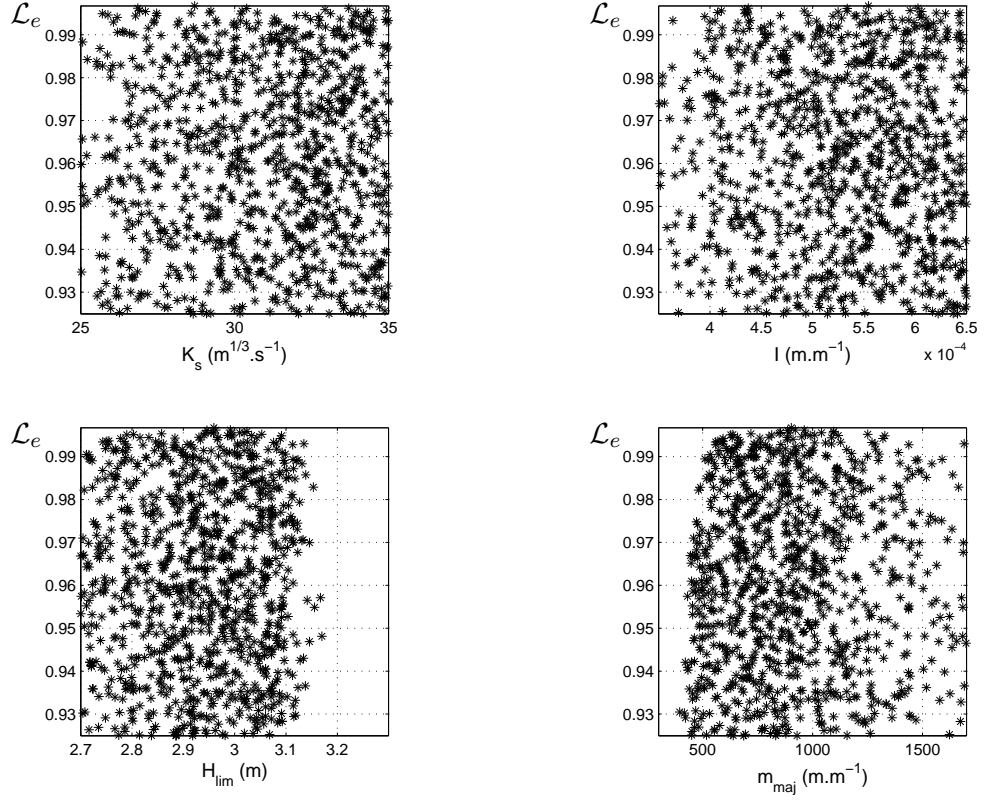
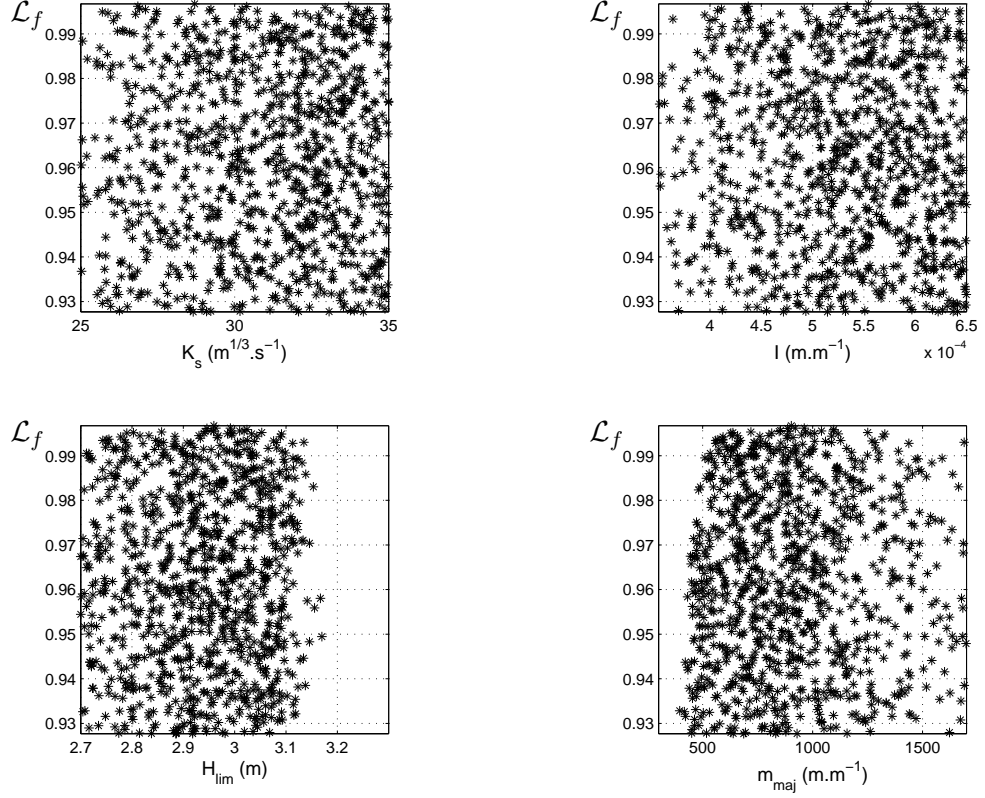


FIG. B.9 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°1


 FIG. B.10 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°1

 FIG. B.11 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°1

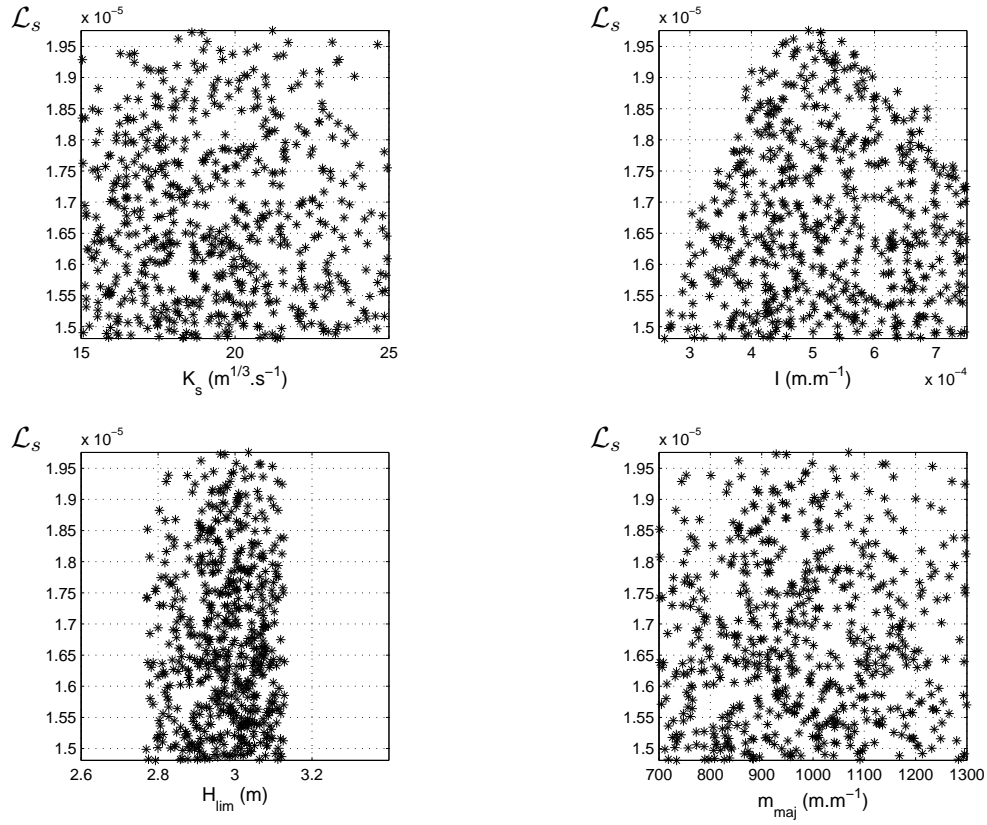


FIG. B.12 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°2

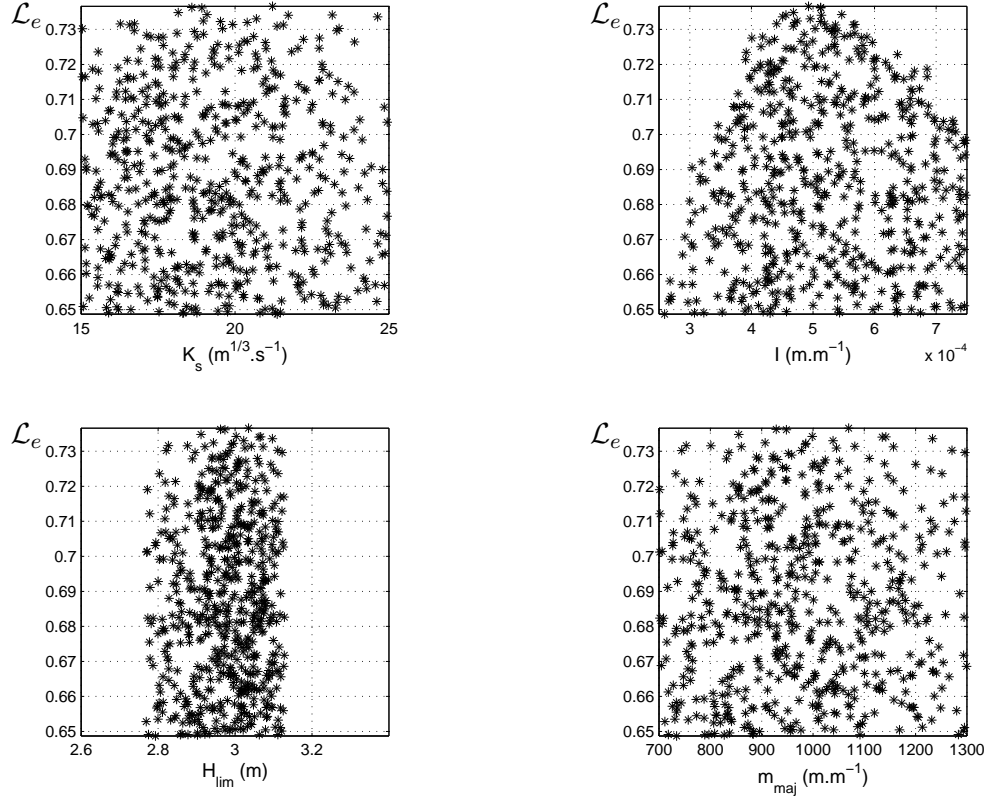


FIG. B.13 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°2

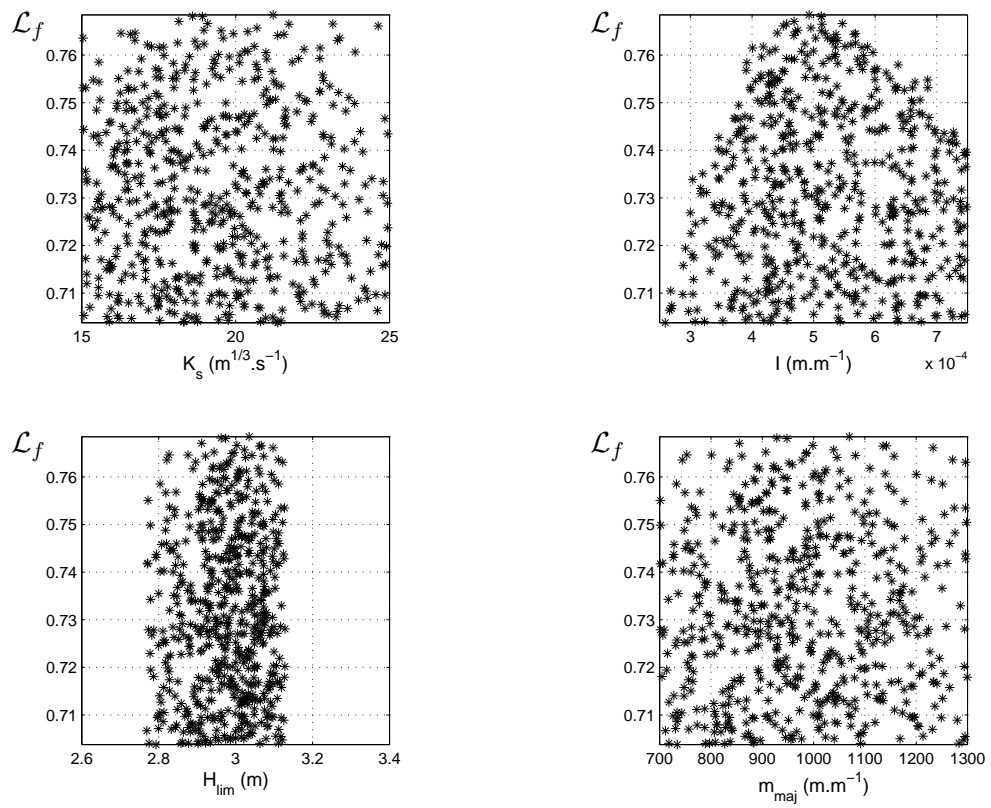


FIG. B.14 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°2

B.5.2 Densités de probabilité cumulatives

Les figures suivantes représentent les densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres K_s , I , H_{lim} et m_{maj} , calculées à partir des valeurs des fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f pour les cas tests n°1 et 2. Elles concernent les résultats obtenus à partir des observations suivantes :

- cas n°1 : $Q = 390 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage,
- cas n°2 : $Q = 200 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage.

Elles sont données à titre d'exemple, afin d'illustrer les remarques du paragraphe (4.2.6) qui se rapportent à l'ensemble des observations testées.

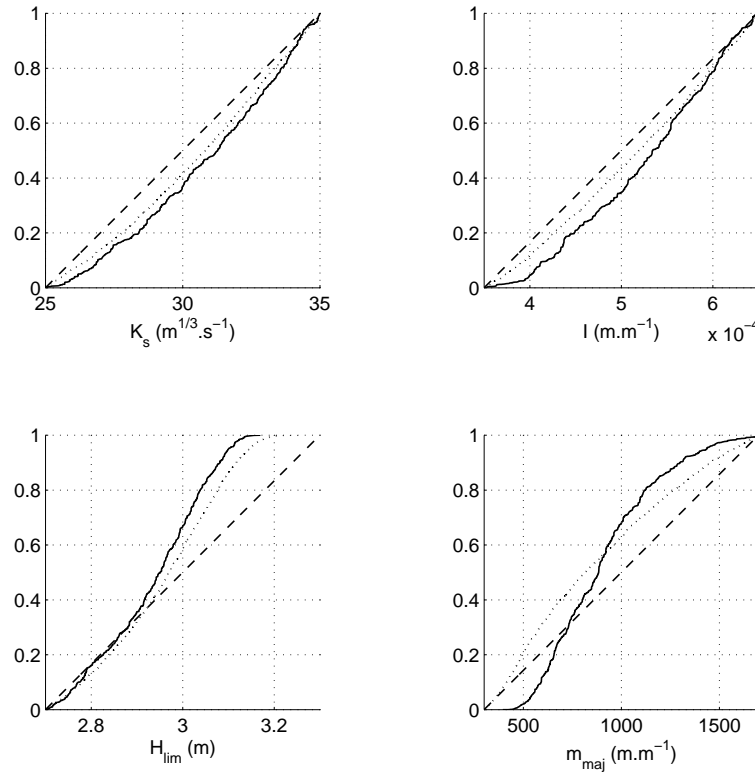


FIG. B.15 – Fonction de vraisemblance \mathcal{L}_s , cas test n°1 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

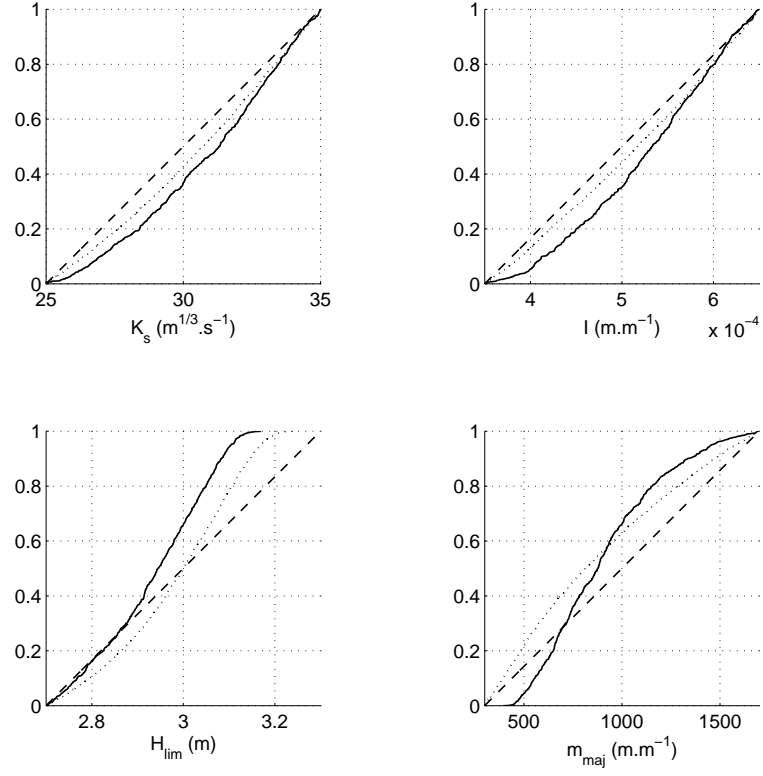


FIG. B.16 – Fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e , cas test n°1 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*

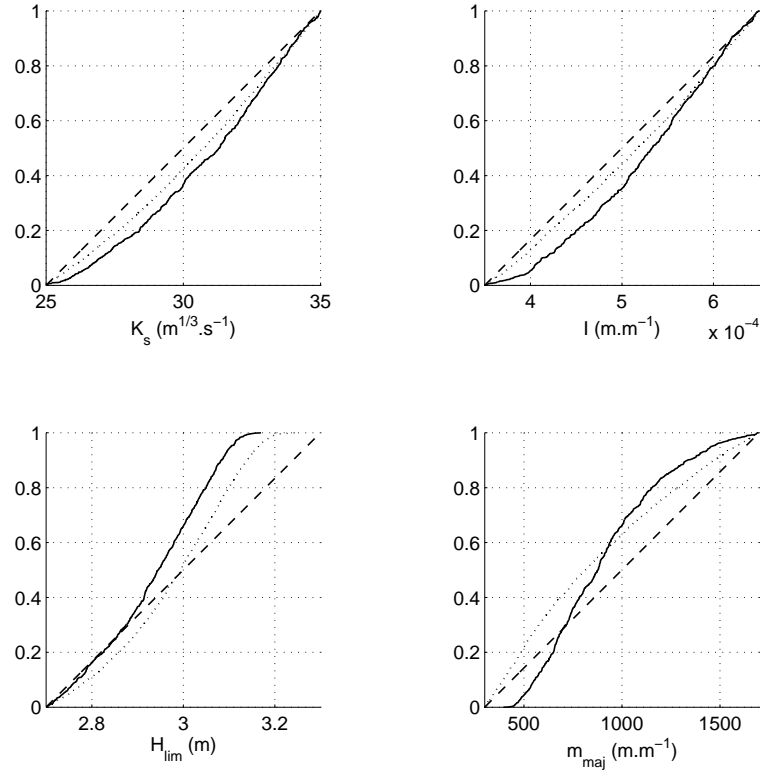


FIG. B.17 – Fonction de vraisemblance \mathcal{L}_f , cas test n°1 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*

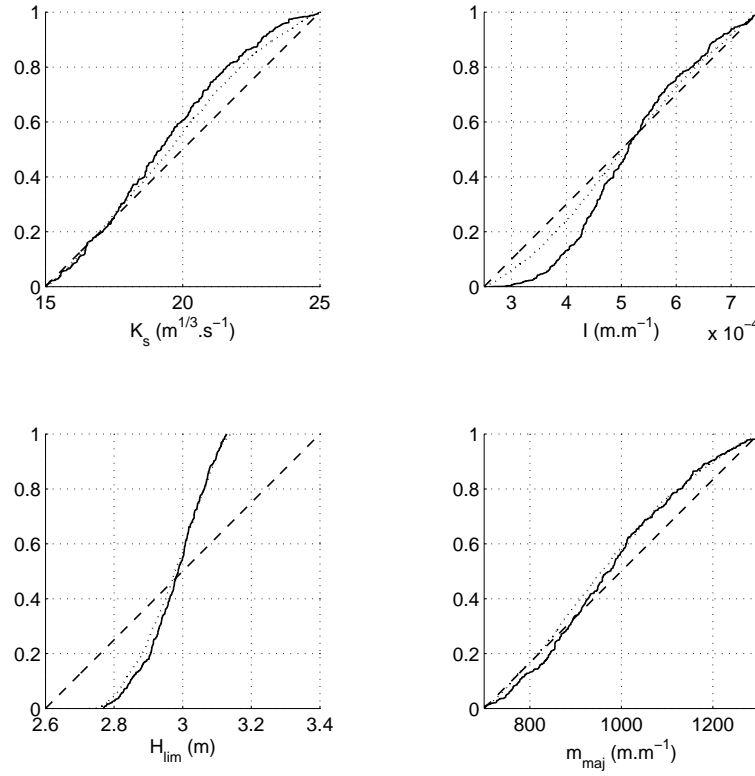


FIG. B.18 – \mathcal{L}_s , cas test n°2 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*

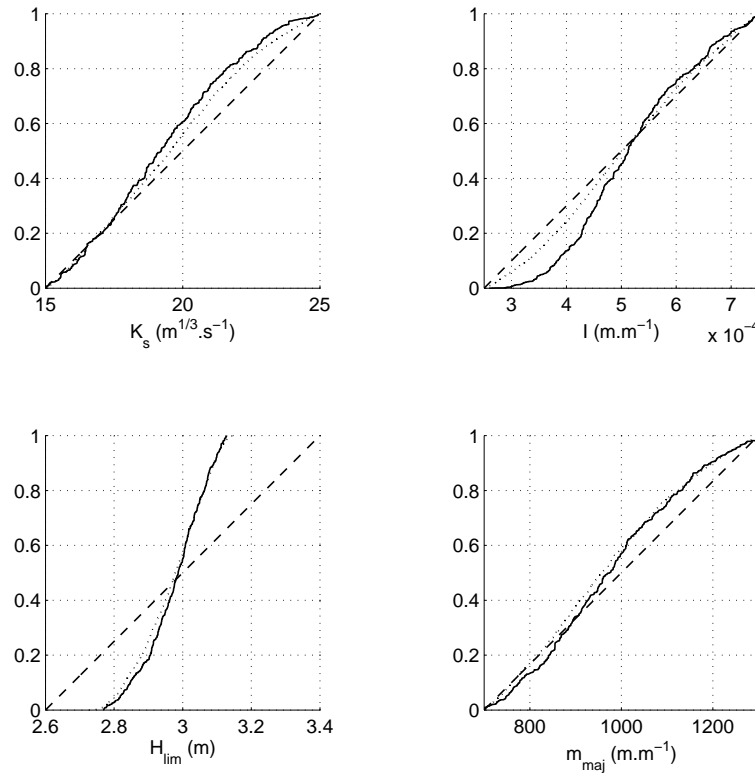


FIG. B.19 – \mathcal{L}_e , cas test n°2 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*

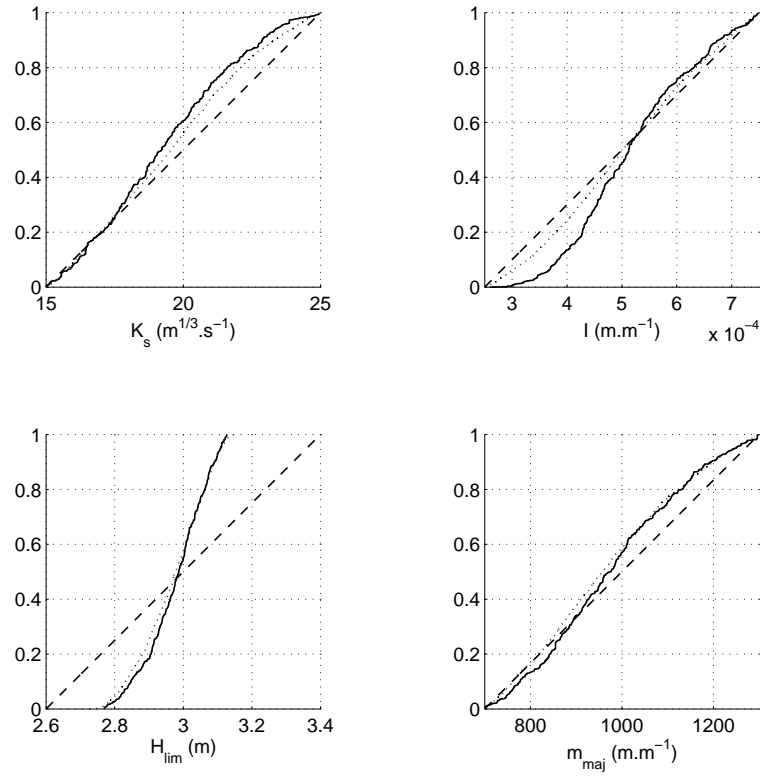


FIG. B.20 – \mathcal{L}_f , cas test n°2 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

Annexe C

Cas d'un écoulement permanent : estimation de six paramètres

Sommaire

C.1 Minimisation de Φ_1, Φ_2 et Φ_3	240
C.1.1 Valeurs initiales des trois fonctions coûts	240
C.1.2 Valeurs finales des trois fonctions coûts	241
C.2 Pourcentages d'erreur sur les valeurs optimales	242
C.3 Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées	248
C.4 Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées	252
C.5 Analyse de sensibilité	259
C.5.1 Valeurs de vraisemblance	259
C.5.2 Densités de probabilité cumulatives	263

Cette annexe présente des résultats complémentaires, obtenus lors de l'estimation de six paramètres dans le cas d'un écoulement monodimensionnel permanent. Ces résultats concernent :

- l'estimation de paramètres proprement dite, avec les valeurs initiales et finales des trois fonctions coûts Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , les pourcentages d'erreur sur les valeurs optimales et sur les grandeurs simulées, ainsi que les intervalles de confiance de la moyenne, pour Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 et le filtre de Kalman étendu. Toutes ces valeurs sont des moyennes sur les 5 tirages effectués pour chaque niveau de bruit,
- l'analyse de sensibilité, avec les valeurs des fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f et les densités de probabilité cumulatives des six paramètres $K_{s,min}$, $K_{s,maj}$, B_0 , I , H_{lim} et m_{maj} . Les figures et les valeurs exposées dans cette partie concernent les résultats obtenus à partir d'un tirage seulement dans chaque cas et sont données à titre d'exemple.

C.1 Minimisation de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3

C.1.1 Valeurs initiales des trois fonctions coûts

	Niveau de bruit σ	Cas n°1		Cas n°2	
		Jeu n°1	Jeu n°2	Jeu n°1	Jeu n°2
Φ_1 (m^2)	0.006	2.410×10^{10}	2.513×10^9	6.030×10^9	1.027×10^{10}
	0.012	2.410×10^{10}	2.514×10^9	6.029×10^9	1.027×10^{10}
	0.018	2.410×10^{10}	2.514×10^9	6.030×10^9	1.027×10^{10}
	0.024	2.410×10^{10}	2.514×10^9	6.030×10^9	1.027×10^{10}
	0.030	2.410×10^{10}	2.514×10^9	6.030×10^9	1.027×10^{10}
	0.036	2.410×10^{10}	2.514×10^9	6.030×10^9	1.027×10^{10}
Φ_2	0.006	5.689×10^5	4.630×10^4	9.545×10^2	1.744×10^3
	0.012	5.692×10^5	4.633×10^4	9.544×10^2	1.744×10^3
	0.018	5.695×10^5	4.636×10^4	9.545×10^2	1.744×10^3
	0.024	5.698×10^5	4.640×10^4	9.546×10^2	1.744×10^3
	0.030	5.706×10^5	4.648×10^4	9.547×10^2	1.744×10^3
	0.036	5.712×10^5	4.655×10^4	9.548×10^2	1.744×10^3
Φ_3	0.006	6.164×10^3	3.879×10^3	5.064×10^2	3.500×10^3
	0.012	6.164×10^3	3.879×10^3	5.063×10^2	3.500×10^3
	0.018	6.164×10^3	3.879×10^3	5.064×10^2	3.500×10^3
	0.024	6.164×10^3	3.879×10^3	5.064×10^2	3.500×10^3
	0.030	6.164×10^3	3.880×10^3	5.064×10^2	3.500×10^3
	0.036	6.165×10^3	3.880×10^3	5.065×10^2	3.500×10^3

TAB. C.1 – Valeurs de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 avant optimisation, correspondant aux jeux de valeurs initiales n°1 et 2

C.1.2 Valeurs finales des trois fonctions coûts

	Niveau de bruit σ	Cas n°1		Cas n°2	
		Jeu n°1	Jeu n°2	Jeu n°1	Jeu n°2
Φ_1 (m^2)	0.006	4.234×10^7	3.031×10^4	1.151×10^4	1.151×10^4
	0.012	4.238×10^7	5.365×10^4	4.624×10^4	4.624×10^4
	0.018	4.245×10^7	1.865×10^5	1.031×10^5	1.031×10^5
	0.024	4.249×10^7	1.896×10^5	1.829×10^5	1.829×10^5
	0.030	4.257×10^7	3.021×10^5	2.874×10^5	2.874×10^5
	0.036	4.263×10^7	4.202×10^5	4.068×10^5	4.068×10^5
Φ_2	0.006	2.792×10^2	2.803	0.002	0.002
	0.012	2.801×10^2	0.507	0.008	0.008
	0.018	2.815×10^2	0.791	0.018	0.018
	0.024	2.832×10^2	1.276	0.032	0.032
	0.030	2.858×10^2	1.771	0.050	0.050
	0.036	2.887×10^2	2.073	0.071	0.071
Φ_3	0.006	7.272×10^2	1.016×10^3	0.002	0.002
	0.012	7.279×10^2	1.017×10^3	0.008	0.008
	0.018	7.289×10^2	1.017×10^3	0.018	0.018
	0.024	7.295×10^2	1.017×10^3	0.032	0.032
	0.030	7.309×10^2	1.019×10^3	0.050	0.050
	0.036	7.319×10^2	1.020×10^3	0.071	0.071

TAB. C.2 – Valeurs finales de Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , après optimisation avec contraintes pour $K_{s,min}$ et $K_{s,maj}$

C.2 Pourcentages d'erreur sur les valeurs optimales

Les tableaux suivants récapitulent les pourcentages d'erreur sur la valeur optimale des paramètres, pour les six niveaux de bruit. L'erreur relative $\delta_{\mathbf{x}}^a$ de l'analyse \mathbf{x}^a par rapport à l'état réel \mathbf{x}^t est définie par la formule suivante (cf. § 4.2.2) :

$$\delta_{\mathbf{x}}^a = \left\| \frac{\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t}{\mathbf{x}^t} \right\| \quad (\text{C.1})$$

L'erreur relative de l'initialisation de la minimisation \mathbf{x}^{init} (jeux n°1 et 2, Tab. 4.14), par rapport à l'état réel \mathbf{x}^t , est notée $\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}}$:

$$\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}} = \left\| \frac{\mathbf{x}^{\text{init}} - \mathbf{x}^t}{\mathbf{x}^t} \right\| \quad (\text{C.2})$$

Le filtre de Kalman étendu (EKF) n'a convergé que pour quelques tirages (2 ou 3 sur les 5, selon les cas) dans le cas test n°2, pour les jeux de valeurs initiales n°1 et 2. Il n'a convergé pour aucun tirage pour les niveaux de bruit $\sigma = 0.006$ et $\sigma = 0.018$, dans le cas test n°2, avec initialisation à partir du jeu de valeurs n°2.

	$\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s, \min}$	16.7 %	7.17 %	4.99 %	7.24 %	6.78 %
$K_{s, \text{maj}}$	33.3 %	18.8 %	15.2 %	19.1 %	18.3 %
B_0	20.0 %	15.0 %	4.41 %	26.5 %	15.0 %
I	80.0 %	29.4 %	24.7 %	13.6 %	25.7 %
H_{lim}	16.7 %	37.7 %	38.9 %	55.6 %	39.3 %
m_{maj}	1.00 %	1.11 %	1.13 %	1.13 %	1.11 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{\text{init}}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s, \min}$	33.3 %	43.8 %	46.5 %	33.3 %	21.4 %
$K_{s, \text{maj}}$	100 %	15.5 %	52.0 %	100 %	9.13 %
B_0	50.0 %	0.10 %	0.21 %	50.0 %	0.43 %
I	100.0 %	28.4 %	51.1 %	762 %	9.79 %
H_{lim}	50.0 %	1.17 %	2.91 %	50.0 %	0.98 %
m_{maj}	30.0 %	17.0 %	57.1 %	30.0 %	11.7 %

TAB. C.3 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.006$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	7.17 %	4.99 %	7.24 %	6.78 %
$K_{s,maj}$	33.3 %	18.8 %	15.1 %	19.1 %	18.3 %
B_0	20.0 %	15.0 %	4.39 %	26.5 %	15.0 %
I	80.0 %	29.4 %	24.7 %	136 %	25.7 %
H_{lim}	16.7 %	37.7 %	38.9 %	55.6 %	39.2 %
m_{maj}	1.00 %	1.11 %	1.13 %	1.13 %	1.11 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	32.2 %	50.0 %	33.3 %	27.2 %
$K_{s,maj}$	100 %	9.11 %	46.3 %	100 %	9.99 %
B_0	50.0 %	0.03 %	0.14 %	50.0 %	0.05 %
I	100.0 %	20.0 %	48.8 %	762 %	7.18 %
H_{lim}	50.0 %	0.73 %	2.70 %	50.0 %	0.95 %
m_{maj}	30.0 %	9.96 %	51.5 %	30.0 %	11.9 %

TAB. C.4 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.012$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	7.17 %	4.99 %	7.24 %	6.78 %
$K_{s,maj}$	33.3 %	18.8 %	15.1 %	19.1 %	18.3 %
B_0	20.0 %	15.0 %	4.35 %	26.5 %	15.0 %
I	80.0 %	29.4 %	24.7 %	136 %	25.7 %
H_{lim}	16.7 %	37.7 %	38.9 %	55.6 %	39.3 %
m_{maj}	1.00 %	1.11 %	1.13 %	1.13 %	1.11 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	32.3 %	47.3 %	33.3 %	7.96 %
$K_{s,maj}$	100 %	10.9 %	53.6 %	100 %	20.6 %
B_0	50.0 %	0.03 %	0.25 %	50.0 %	0.19 %
I	100.0 %	21.9 %	52.8 %	762 %	31.2 %
H_{lim}	50.0 %	0.82 %	2.99 %	50.0 %	2.11 %
m_{maj}	30.0 %	9.97 %	57.2 %	30.0 %	24.9 %

TAB. C.5 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.018$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	7.17 %	4.98 %	7.23 %	6.78 %
$K_{s,maj}$	33.3 %	18.8 %	15.1 %	19.1 %	18.3 %
B_0	20.0 %	15.0 %	4.31 %	26.6 %	15.1 %
I	80.0 %	29.4 %	24.7 %	136 %	25.7 %
H_{lim}	16.7 %	37.7 %	38.9 %	55.6 %	39.2 %
m_{maj}	1.00 %	1.11 %	1.13 %	1.13 %	1.11 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	30.4 %	50.0 %	33.3 %	57.8 %
$K_{s,maj}$	100 %	6.07 %	49.2 %	100 %	15.2 %
B_0	50.0 %	0.03 %	0.11 %	50.0 %	0.15 %
I	100.0 %	16.6 %	50.7 %	762 %	15.4 %
H_{lim}	50.0 %	0.52 %	2.85 %	50.0 %	1.62 %
m_{maj}	30.0 %	6.66 %	54.2 %	30.0 %	18.2 %

TAB. C.6 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.024$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	7.17 %	4.98 %	7.22 %	6.78 %
$K_{s,maj}$	33.3 %	18.8 %	15.1 %	19.0 %	18.3 %
B_0	20.0 %	15.0 %	4.24 %	26.6 %	15.0 %
I	80.0 %	29.4 %	24.7 %	136 %	25.7 %
H_{lim}	16.7 %	37.7 %	38.9 %	55.7 %	39.3 %
m_{maj}	1.00 %	1.11 %	1.13 %	1.13 %	1.11 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	40.2 %	46.8 %	33.3 %	9.45 %
$K_{s,maj}$	100 %	13.2 %	59.4 %	100 %	30.2 %
B_0	50.0 %	0.05 %	0.12 %	50.0 %	0.00 %
I	100.0 %	25.8 %	54.4 %	762 %	56.6 %
H_{lim}	50.0 %	1.03 %	3.18 %	50.0 %	3.46 %
m_{maj}	30.0 %	14.5 %	64.4 %	30.0 %	33.0 %

TAB. C.7 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.030$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	7.17 %	4.99 %	7.20 %	6.77 %
$K_{s,maj}$	33.3 %	18.8 %	15.1 %	19.0 %	18.3 %
B_0	20.0 %	15.0 %	4.17 %	26.6 %	15.0 %
I	80.0 %	29.4 %	24.7 %	136 %	25.7 %
H_{lim}	16.7 %	37.7 %	38.9 %	55.9 %	39.3 %
m_{maj}	1.00 %	1.11 %	1.13 %	1.13 %	1.11 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	26.1 %	46.6 %	33.3 %	38.5 %
$K_{s,maj}$	100 %	10.1 %	55.8 %	100 %	18.6 %
B_0	50.0 %	0.11 %	0.02 %	50.0 %	0.48 %
I	100.0 %	19.3 %	52.7 %	762 %	23.0 %
H_{lim}	50.0 %	0.78 %	3.09 %	50.0 %	2.13 %
m_{maj}	30.0 %	10.7 %	60.6 %	30.0 %	23.3 %

TAB. C.8 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°1, $\sigma = 0.036$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	24.8 %	1.52 %	14.7 %	12.9 %
$K_{s,maj}$	50.0 %	0.38 %	0.03 %	0.38 %	2.04 %
B_0	20.0 %	0.21 %	0.03 %	0.23 %	1.86 %
I	80.0 %	0.14 %	0.02 %	0.16 %	1.96 %
H_{lim}	16.7 %	0.02 %	0.01 %	0.03 %	0.51 %
m_{maj}	1.00 %	0.15 %	0.01 %	0.15 %	2.60 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	21.6 %	48.3 %	15.7 %	-
$K_{s,maj}$	100 %	0.33 %	0.62 %	0.41 %	-
B_0	50.0 %	0.18 %	0.35 %	0.25 %	-
I	100 %	0.12 %	0.24 %	0.17 %	-
H_{lim}	50.0 %	0.02 %	0.04 %	0.03 %	-
m_{maj}	30.0 %	0.13 %	0.25 %	0.16 %	-

TAB. C.9 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.006$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	23.1 %	3.06 %	15.7 %	21.2 %
$K_{s,maj}$	50.0 %	0.42 %	0.00 %	0.36 %	0.69 %
B_0	20.0 %	0.22 %	0.04 %	0.23 %	0.96 %
I	80.0 %	0.19 %	0.03 %	0.11 %	0.14 %
H_{lim}	16.7 %	0.02 %	0.01 %	0.03 %	0.08 %
m_{maj}	1.00 %	0.16 %	0.00 %	0.14 %	0.69 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	20.9 %	48.7 %	16.7 %	152 %
$K_{s,maj}$	100 %	0.39 %	0.68 %	0.39 %	9.99 %
B_0	50.0 %	0.20 %	0.37 %	0.25 %	10.6 %
I	100 %	0.18 %	0.31 %	0.12 %	3.47 %
H_{lim}	50.0 %	0.02 %	0.03 %	0.04 %	0.24 %
m_{maj}	30.0 %	0.15 %	0.26 %	0.15 %	9.52 %

TAB. C.10 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.012$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	6.79 %	1.29 %	10.5 %	21.1 %
$K_{s,maj}$	50.0 %	0.05 %	0.10 %	0.70 %	1.12 %
B_0	20.0 %	0.06 %	0.03 %	0.37 %	0.09 %
I	80.0 %	0.04 %	0.10 %	0.33 %	1.68 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.00 %	0.05 %	0.85 %
m_{maj}	1.00 %	0.03 %	0.03 %	0.25 %	1.89 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	13.3 %	32.3 %	12.8 %	-
$K_{s,maj}$	100 %	0.09 %	0.19 %	0.07 %	-
B_0	50.0 %	0.01 %	0.14 %	0.01 %	-
I	100 %	0.09 %	0.02 %	0.08 %	-
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.01 %	0.00 %	-
m_{maj}	30.0 %	0.02 %	0.09 %	0.01 %	-

TAB. C.11 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.018$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	26.2 %	11.6 %	6.18 %	29.6 %
$K_{s,maj}$	50.0 %	0.34 %	0.13 %	0.22 %	1.19 %
B_0	20.0 %	0.28 %	0.15 %	0.06 %	2.01 %
I	80.0 %	0.09 %	0.00 %	0.14 %	0.38 %
H_{lim}	16.7 %	0.05 %	0.03 %	0.00 %	0.24 %
m_{maj}	1.00 %	0.15 %	0.07 %	0.07 %	1.31 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	29.2 %	49.8 %	3.93 %	869 %
$K_{s,maj}$	100 %	0.38 %	0.59 %	0.20 %	18.9 %
B_0	50.0 %	0.31 %	0.41 %	0.05 %	20.2 %
I	100 %	0.11 %	0.18 %	0.13 %	6.92 %
H_{lim}	50.0 %	0.05 %	0.06 %	0.00 %	9.29 %
m_{maj}	30.0 %	0.16 %	0.25 %	0.06 %	10.7 %

TAB. C.12 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.024$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	28.6 %	7.17 %	4.13 %	3.38 %
$K_{s,maj}$	50.0 %	0.43 %	0.18 %	0.25 %	20.7 %
B_0	20.0 %	0.24 %	0.09 %	0.13 %	20.6 %
I	80.0 %	0.08 %	0.14 %	0.17 %	0.51 %
H_{lim}	16.7 %	0.00 %	0.02 %	0.03 %	3.93 %
m_{maj}	1.00 %	0.21 %	0.04 %	0.06 %	17.8 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	23.6 %	47.0 %	3.99 %	11.2 %
$K_{s,maj}$	100 %	0.39 %	0.61 %	0.24 %	2.52 %
B_0	50.0 %	0.21 %	0.37 %	0.12 %	0.91 %
I	100 %	0.06 %	0.17 %	0.17 %	2.75 %
H_{lim}	50.0 %	0.00 %	0.03 %	0.03 %	0.34 %
m_{maj}	30.0 %	0.19 %	0.27 %	0.06 %	1.59 %

TAB. C.13 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.030$

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°1	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	16.7 %	24.3 %	10.5 %	16.4 %	9.40 %
$K_{s,maj}$	50.0 %	0.48 %	0.25 %	0.29 %	0.91 %
B_0	20.0 %	0.13 %	0.02 %	0.04 %	4.84 %
I	80.0 %	0.41 %	0.33 %	0.34 %	8.64 %
H_{lim}	16.7 %	0.01 %	0.00 %	0.00 %	0.43 %
m_{maj}	1.00 %	0.12 %	0.03 %	0.05 %	4.88 %

	$\delta_{\mathbf{x}}^{init}$	$\delta_{\mathbf{x}}^a$			
Paramètre	Jeu n°2	Φ_1	Φ_2	Φ_3	EKF
$K_{s,min}$	33.3 %	25.7 %	49.3 %	16.6 %	1874 %
$K_{s,maj}$	100 %	0.51 %	0.74 %	0.33 %	35.8 %
B_0	50.0 %	0.15 %	0.30 %	0.06 %	15.7 %
I	100 %	0.42 %	0.53 %	0.36 %	17.7 %
H_{lim}	50.0 %	0.02 %	0.04 %	0.00 %	11.8 %
m_{maj}	30.0 %	0.13 %	0.22 %	0.06 %	22.5 %

TAB. C.14 – Erreur relative sur les valeurs estimées $\delta_{\mathbf{x}}^a$, cas n°2, $\sigma = 0.036$

C.3 Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées

Les erreurs relatives sur la largeur au miroir \mathbf{B}^a et la hauteur d'eau \mathbf{H}^a simulées à partir des valeurs optimales des paramètres sont calculées de la façon suivantes (§ 4.2.4.1) :

$$\delta_B^a = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \left[\frac{1}{1001} \sum_{j=1}^{1001} \left| \frac{\mathbf{B}^t|_j^k - \mathbf{B}^a|_j^k}{\mathbf{B}^t|_j^k} \right| \right] \quad (\text{C.3})$$

$$\delta_H^a = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \left[\frac{1}{1001} \sum_{j=1}^{1001} \left| \frac{\mathbf{H}^t|_j^k - \mathbf{H}^a|_j^k}{\mathbf{H}^t|_j^k} \right| \right] \quad (\text{C.4})$$

k est l'indice de sommation sur les observations, j est l'indice spatial. Les exposants \mathbf{t} et \mathbf{a} désignent respectivement les grandeurs “vraies” (\mathbf{t} pour “true”) et celles obtenues par résolution du modèle à partir des valeurs estimées des paramètres (\mathbf{a} pour “analysed”). Les tableaux suivants donnent les valeurs de δ_B^a et δ_H^a pour tous les cas testés et pour tous les niveaux de bruit. EKF est l'abréviation de filtre de Kalman étendu, il n'a convergé que pour quelques tirages (2 ou 3 sur les 5, selon les cas) dans le cas test n°2, pour les jeux de valeurs initiales n°1 et 2. Il n'a convergé pour aucun tirage pour les niveaux de bruit $\sigma = 0.006$ et $\sigma = 0.018$, dans le cas test n°2, avec initialisation à partir du jeu de valeurs n°2.

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	18.7 %	17.5 %
		Φ_2	10.8 %	12.9 %
		Φ_3	27.4 %	65.1 %
		EKF	18.7 %	16.8 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.78 %	4.63 %
		Φ_2	1.34 %	12.1 %
		Φ_3	55.7 %	15.2 %
		EKF	2.38 %	11.1 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.06 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.07 %
		EKF	0.14 %	0.44 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.05 %
		Φ_2	0.00 %	0.10 %
		Φ_3	0.00 %	0.07 %
		EKF	-	-

TAB. C.15 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.006$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	18.7 %	17.5 %
		Φ_2	10.8 %	12.9 %
		Φ_3	27.4 %	65.1 %
		EKF	18.7 %	16.8 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.77 %	4.10 %
		Φ_2	1.03 %	10.1 %
		Φ_3	55.7 %	15.2 %
		EKF	1.93 %	11.8 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.06 %
		Φ_2	0.00 %	0.00 %
		Φ_3	0.00 %	0.07 %
		EKF	0.05 %	0.26 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.06 %
		Φ_2	0.00 %	0.10 %
		Φ_3	0.00 %	0.07 %
		EKF	0.56 %	3.07 %

TAB. C.16 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.012$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	18.7 %	17.5 %
		Φ_2	10.8 %	12.9 %
		Φ_3	27.4 %	65.1 %
		EKF	18.7 %	16.8 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	1.34 %	4.26 %
		Φ_2	1.15 %	13.4 %
		Φ_3	55.7 %	15.2 %
		EKF	2.28 %	12.3 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.01 %
		Φ_2	0.00 %	0.02 %
		Φ_3	0.08 %	0.13 %
		EKF	0.14 %	0.10 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.05 %	0.02 %
		Φ_2	0.05 %	0.02 %
		Φ_3	0.05 %	0.02 %
		EKF	-	-

TAB. C.17 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.018$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	18.7 %	17.5 %
		Φ_2	10.7 %	12.9 %
		Φ_3	27.4 %	65.1 %
		EKF	18.7 %	16.8 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.55 %	4.19 %
		Φ_2	0.79 %	11.6 %
		Φ_3	55.7 %	15.2 %
			3.11 %	21.6 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.08 %
		Φ_2	0.00 %	0.04 %
		Φ_3	0.00 %	0.02 %
		EKF	0.08 %	0.56 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.09 %
		Φ_2	0.00 %	0.12 %
		Φ_3	0.02 %	0.02 %
		EKF	0.86 %	3.85 %

TAB. C.18 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.024$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	18.7 %	17.5 %
		Φ_2	10.7 %	12.8 %
		Φ_3	27.4 %	65.1 %
		EKF	18.7 %	16.8 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.58 %	4.34 %
		Φ_2	0.94 %	14.8 %
		Φ_3	55.7 %	15.2 %
		EKF	37.7 %	17.3 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.07 %
		Φ_2	0.00 %	0.03 %
		Φ_3	0.03 %	0.05 %
		EKF	1.01 %	9.17 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.06 %
		Φ_2	0.00 %	0.10 %
		Φ_3	0.03 %	0.05 %
		EKF	0.25 %	0.15 %

TAB. C.19 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.030$

			δ_B^a	δ_H^a
Cas test n°1	Jeu initial n°1	Φ_1	18.7 %	17.5 %
		Φ_2	10.6 %	12.8 %
		Φ_3	27.4 %	65.1 %
		EKF	18.7 %	16.8 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	1.46 %	3.66 %
		Φ_2	0.97 %	13.5 %
		Φ_3	55.7 %	15.2 %
		EKF	2.72 %	18.7 %
Cas test n°2	Jeu initial n°1	Φ_1	0.00 %	0.04 %
		Φ_2	0.01 %	0.00 %
		Φ_3	0.03 %	0.01 %
		EKF	0.26 %	1.20 %
	Jeu initial n°2	Φ_1	0.00 %	0.05 %
		Φ_2	0.00 %	0.09 %
		Φ_3	0.02 %	0.02 %
		EKF	1.08 %	1.03 %

TAB. C.20 – Pourcentages d'erreur moyens sur les grandeurs simulées, $\sigma = 0.036$

C.4 Intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées

L'assimilation de données du cas test n°1 donne des résultats nettement moins satisfaisants que lorsque les données sont issues du cas test n°2. En particulier, il arrive que l'étalement des résultats obtenus pour chaque tirage soit pratiquement nul, les valeurs estimées étant relativement éloignées des valeurs vraies pour tous les paramètres. Dans ce cas de figure, les six intervalles de confiance sont resserrés autour de l'estimation et aucun ne contient la valeur vraie. Les figures représentant intervalles de confiance et valeurs moyennes estimées ne sont alors pas présentées ici car elles n'apportent aucune information supplémentaire. Les cas concernés sont les suivants :

- Fonction coût Φ_1 : cas test n°1, initialisation à partir du jeu de valeurs n°1,
- Fonction coût Φ_2 : cas test n°1, initialisation à partir du jeu de valeurs n°1,
- Fonction coût Φ_3 : cas test n°1, initialisation à partir des jeux de valeurs n°1 et 2,
- Filtre de Kalman étendu : cas test n°1, initialisation à partir du jeu de valeurs n°1.

Par ailleurs, le filtre de Kalman étendu n'a convergé que pour quelques tirages (2 ou 3 sur les 5, selon les cas) dans le cas test n°2, pour les jeux de valeurs initiales n°1 et 2. Il n'a convergé pour aucun tirage pour les niveaux de bruit $\sigma = 0.006$ et $\sigma = 0.018$, dans le cas test n°2, avec initialisation à partir du jeu de valeurs n°2.

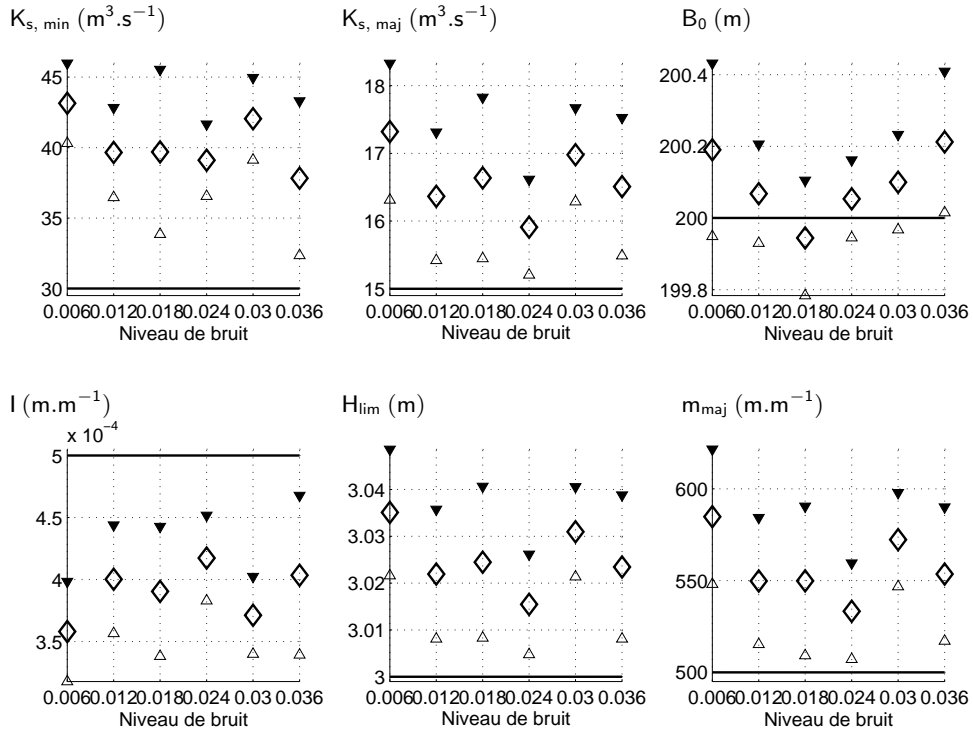


FIG. C.1 – Intervalles de confiance, \triangle borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \diamond valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , minimisation avec bornes pour $K_{s, \min}$ et $K_{s, \text{maj}}$, cas test n°1, — Valeur vraie, jeu de valeurs initiales n°2

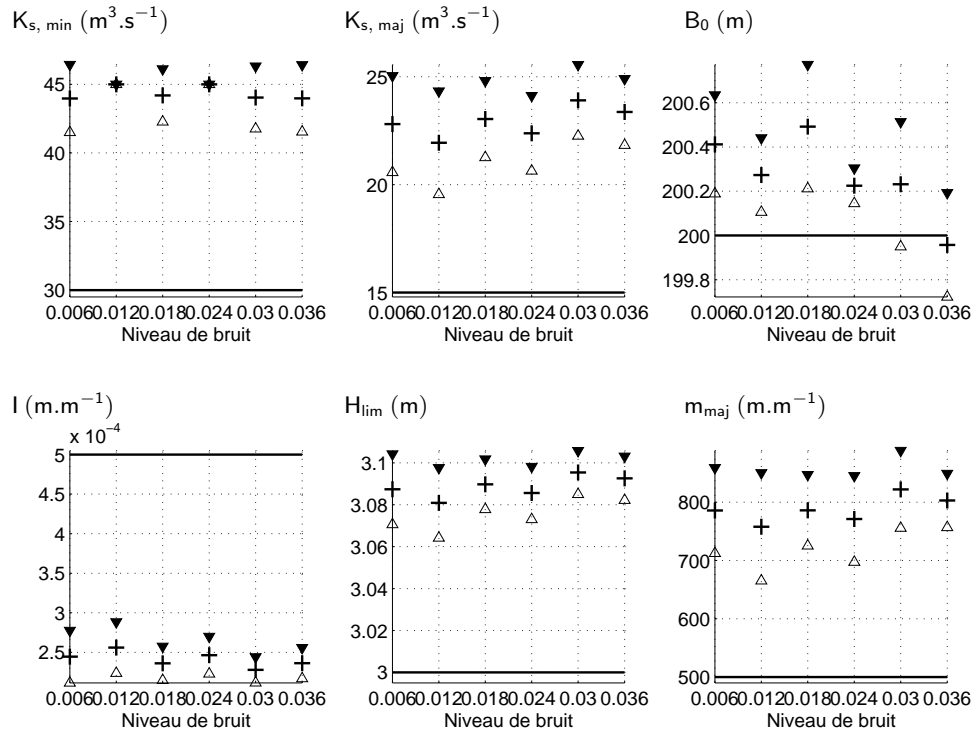


FIG. C.2 – Intervalles de confiance, \triangle borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et $+$ valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_2 , minimisation avec bornes pour $K_{s, \min}$ et $K_{s, \text{maj}}$, cas test n°1, — Valeur vraie, jeu de valeurs initiales n°2

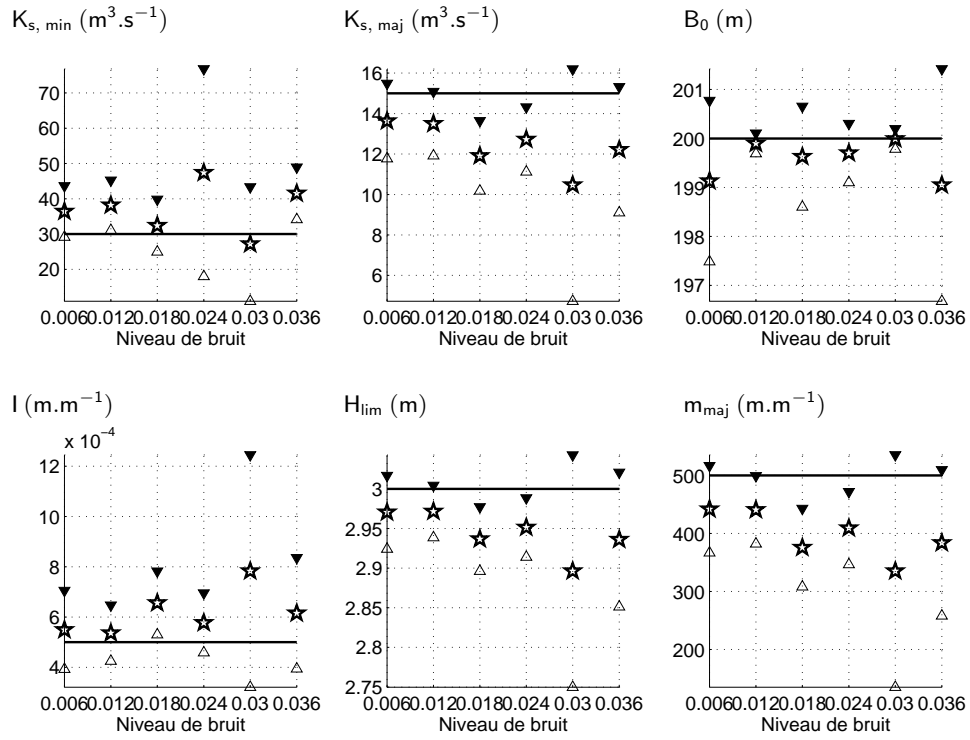


FIG. C.3 – Intervalles de confiance, Δ borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \star valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, filtre de Kalman étendu, cas test n°1, — Valeur vraie, jeu de valeurs initiales n°2

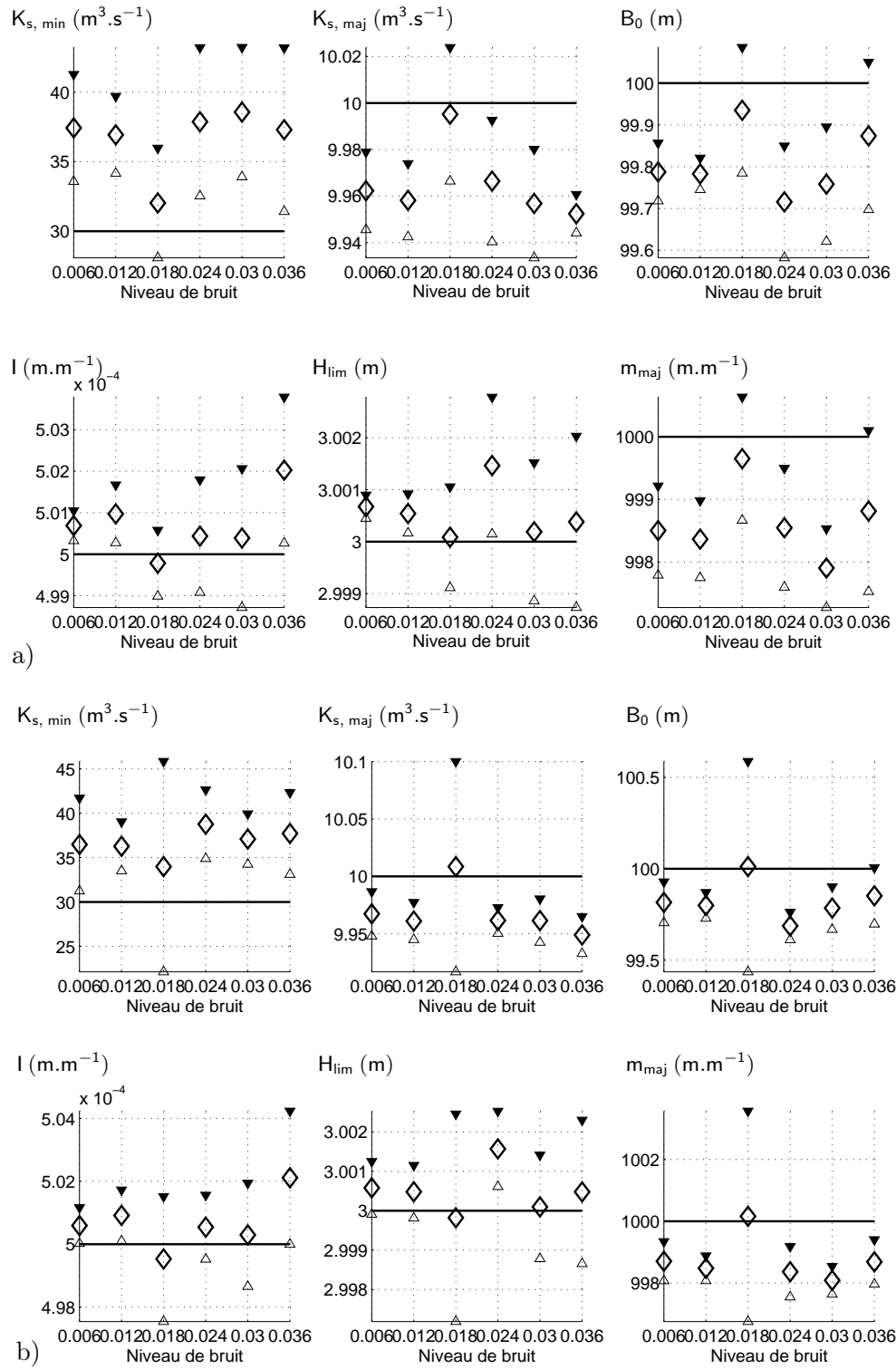


FIG. C.4 – Intervalles de confiance, \triangle borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \diamond valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_1 , minimisation avec bornes pour $K_{s, \min}$ et $K_{s, \text{maj}}$, cas test n°2, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

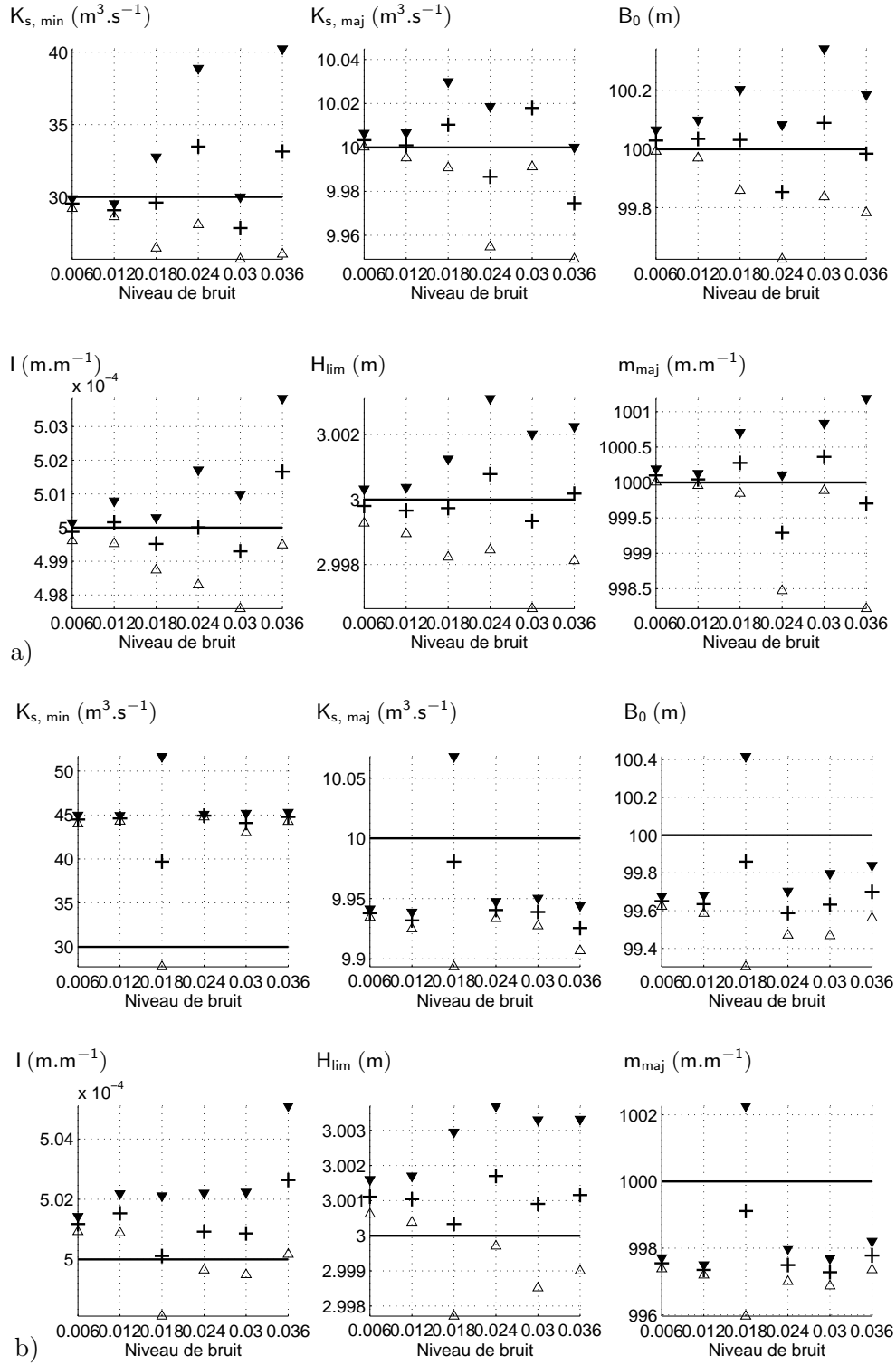


FIG. C.5 – Intervalles de confiance, Δ borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et + valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_2 , minimisation avec bornes pour $K_{s, \min}$ et $K_{s, \text{maj}}$, cas test n°2, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

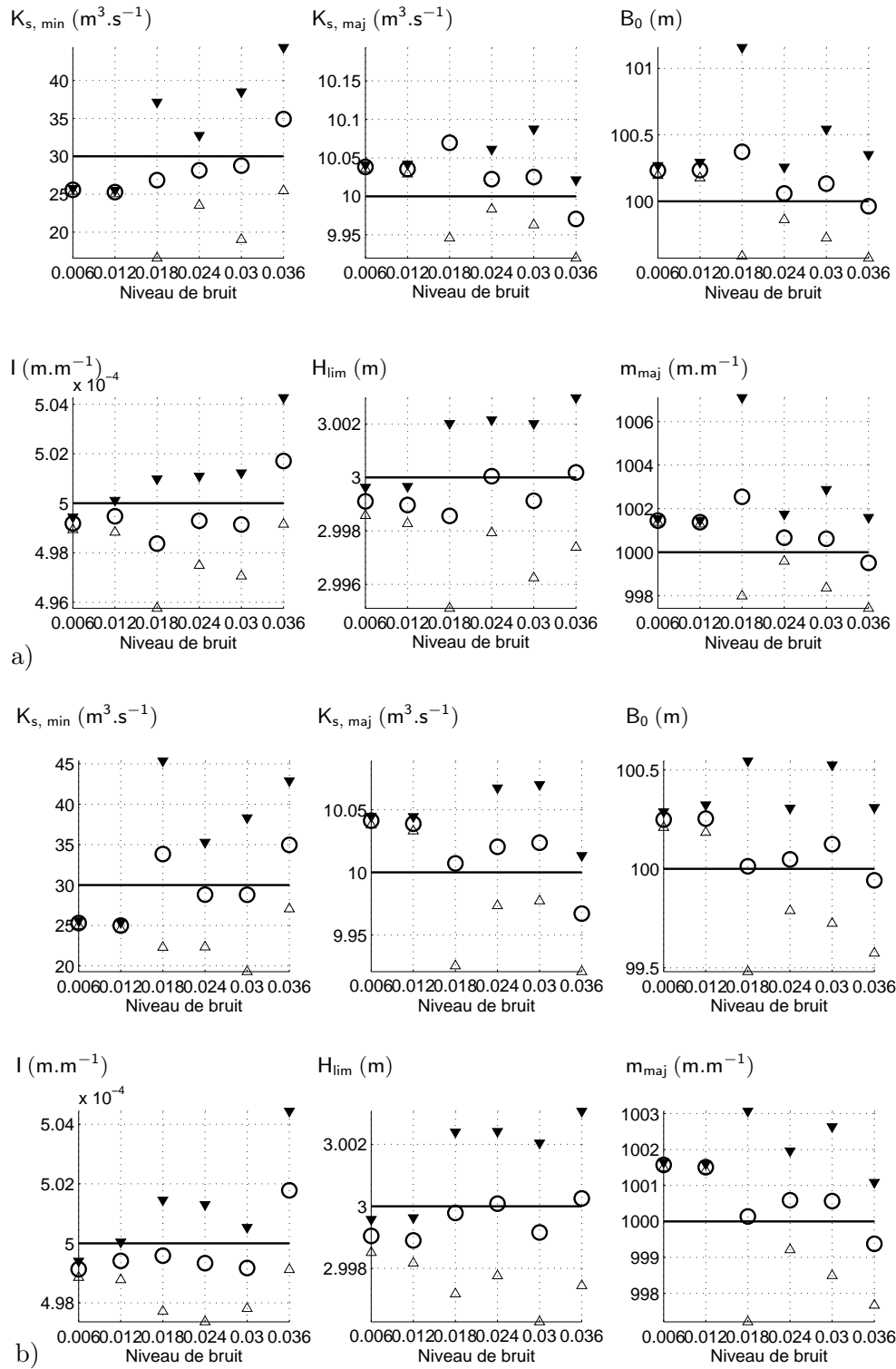


FIG. C.6 – Intervalles de confiance, Δ borne inférieure, \blacktriangledown borne supérieure, et \bigcirc valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, fonction coût Φ_3 , minimisation avec bornes pour $K_{s, \min}$ et $K_{s, \text{maj}}$, cas test n°2, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

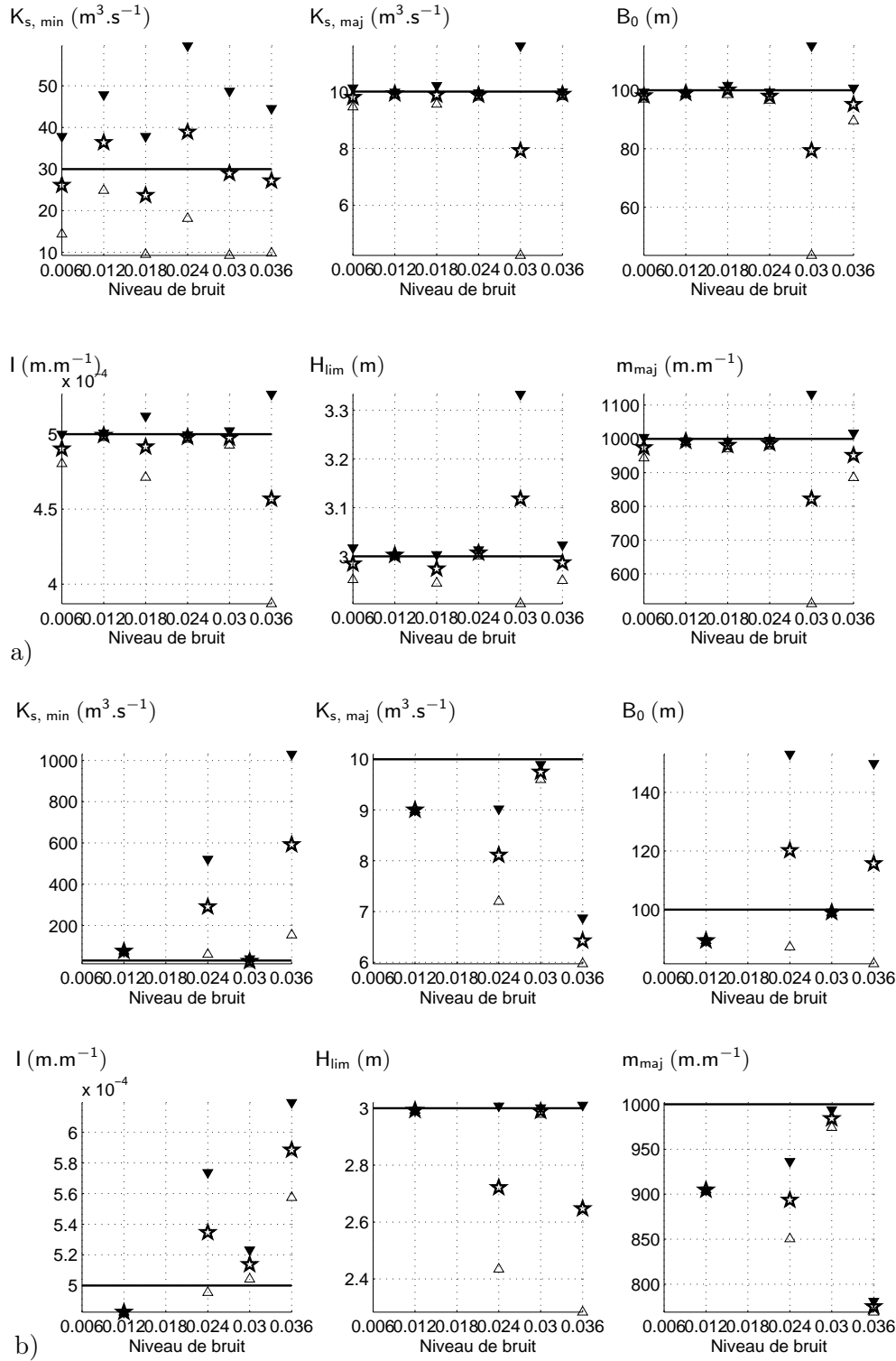


FIG. C.7 – Intervalles de confiance, Δ borne inférieure, ∇ borne supérieure, et \star valeurs moyennes estimées en fonction du niveau de bruit, filtre de Kalman étendu, cas test n°2, — Valeur vraie, a) jeu de valeurs initiales n°1, b) jeu de valeurs initiales n°2

C.5 Analyse de sensibilité

C.5.1 Valeurs de vraisemblance

Les figures suivantes représentent les valeurs des fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f obtenues en fonction des six paramètres $K_{s,min}$, $K_{s,maj}$, B_0 , I , H_{lim} et m_{maj} , pour les cas tests n°1 et 2. Elles concernent les résultats obtenus à partir des observations suivantes :

- cas n°1 : $Q = 335 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage,
- cas n°2 : $Q = 200 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage.

Elles sont données à titre d'exemple, afin d'illustrer les remarques du paragraphe (4.3.3) qui se rapportent à l'ensemble des observations testées.

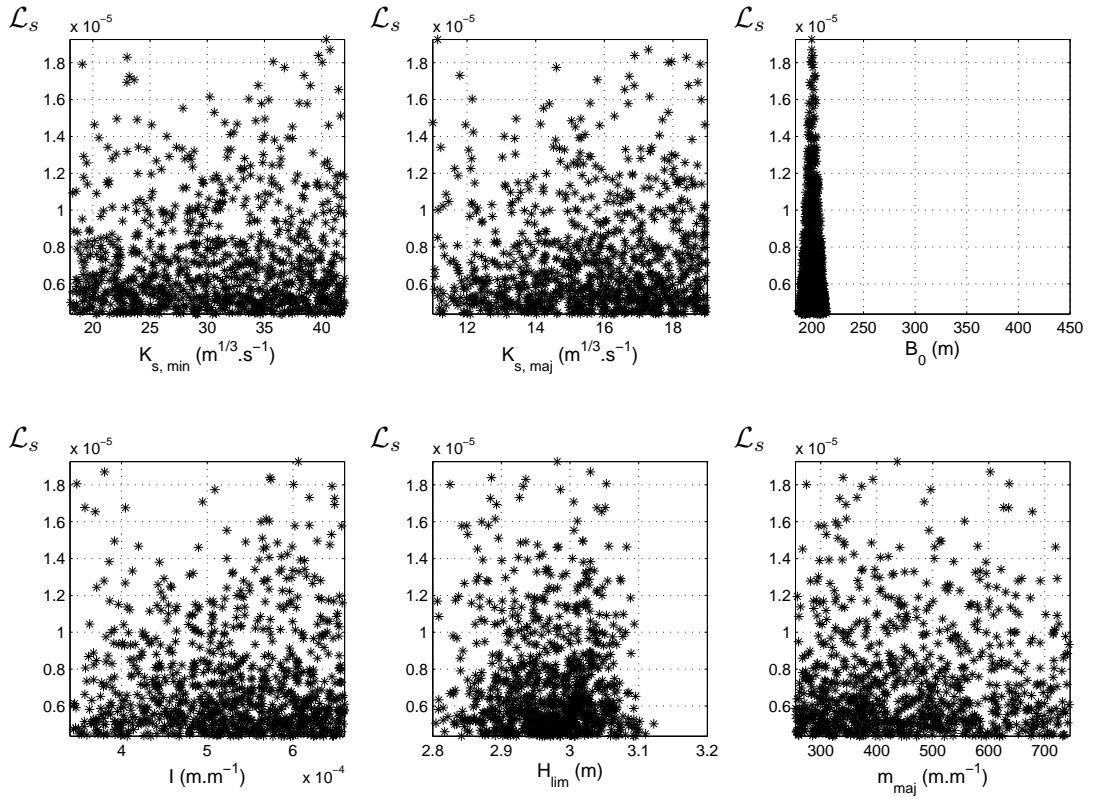


FIG. C.8 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°1

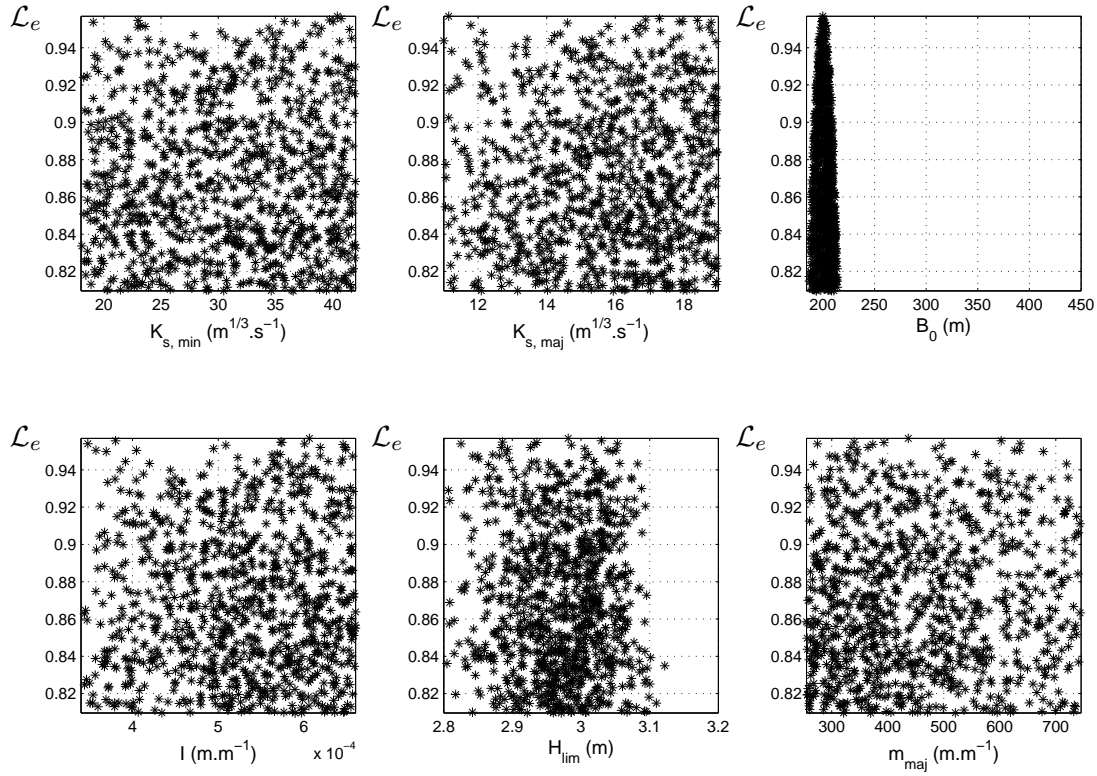


FIG. C.9 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°1

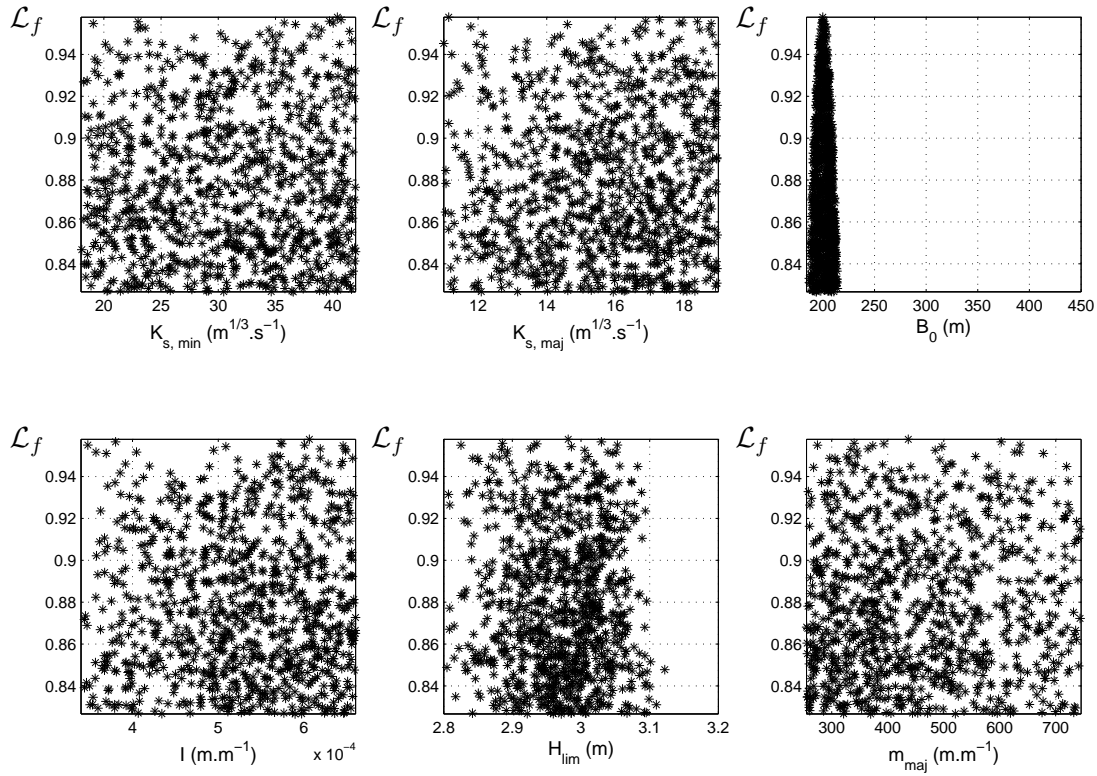
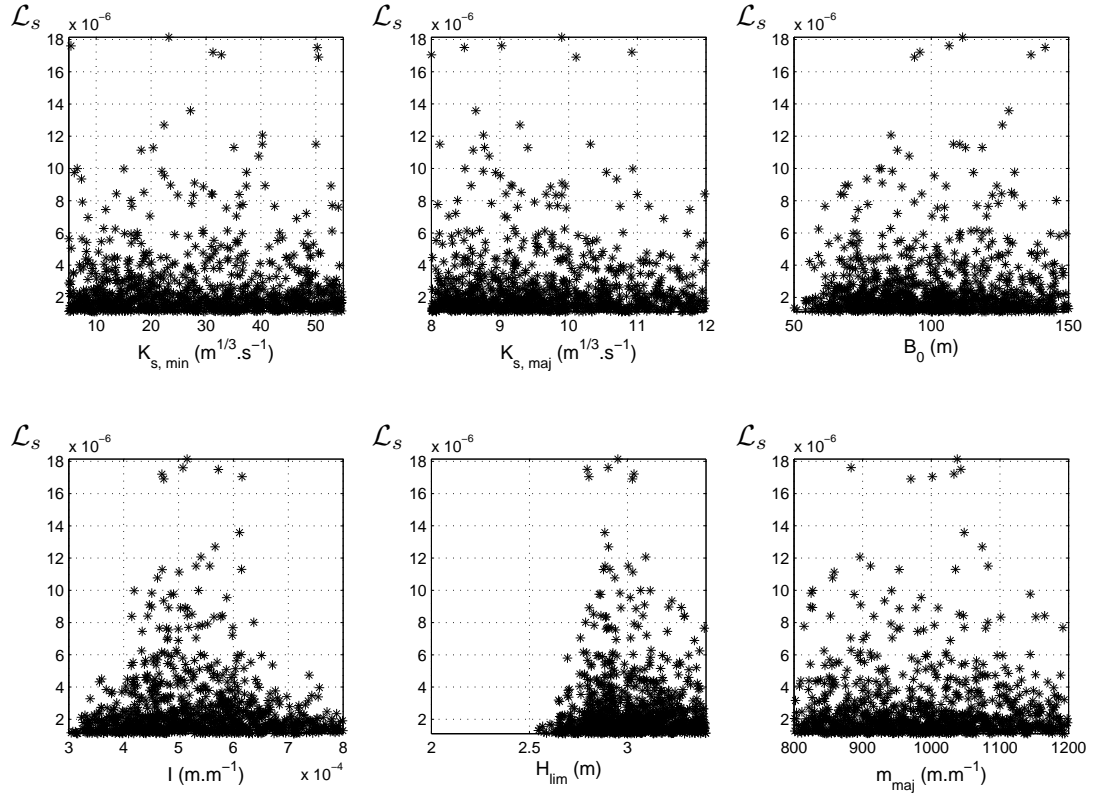
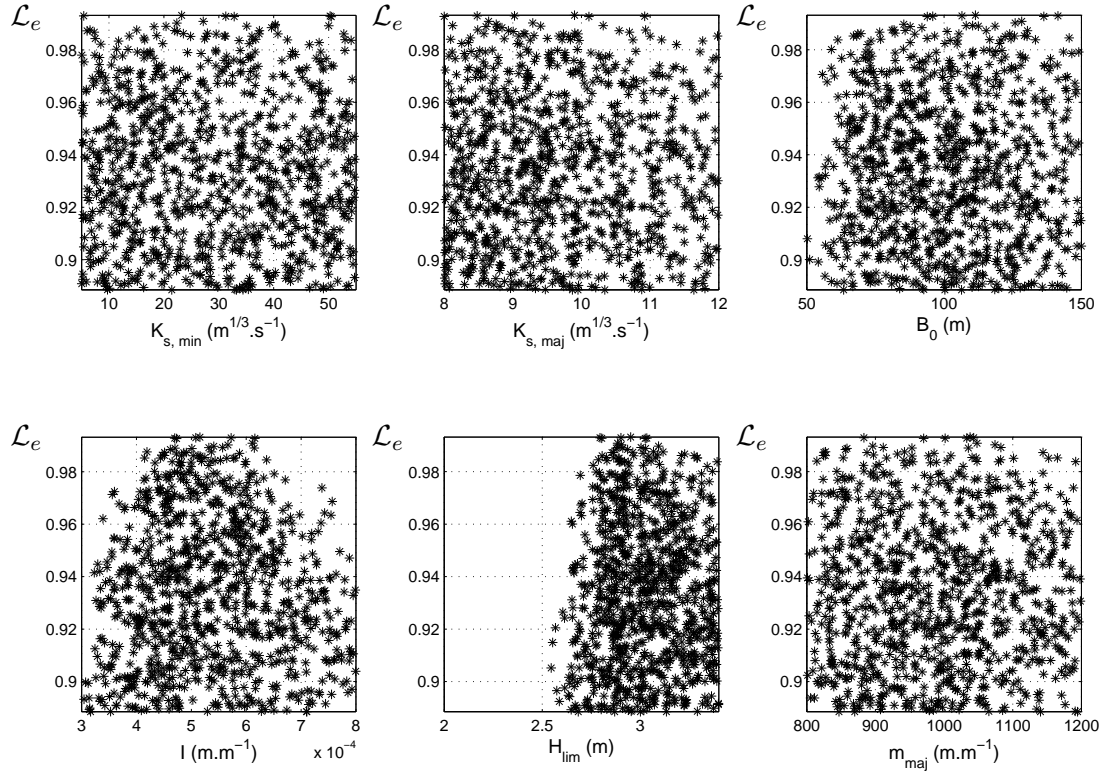


FIG. C.10 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°1

FIG. C.11 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°2FIG. C.12 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°2

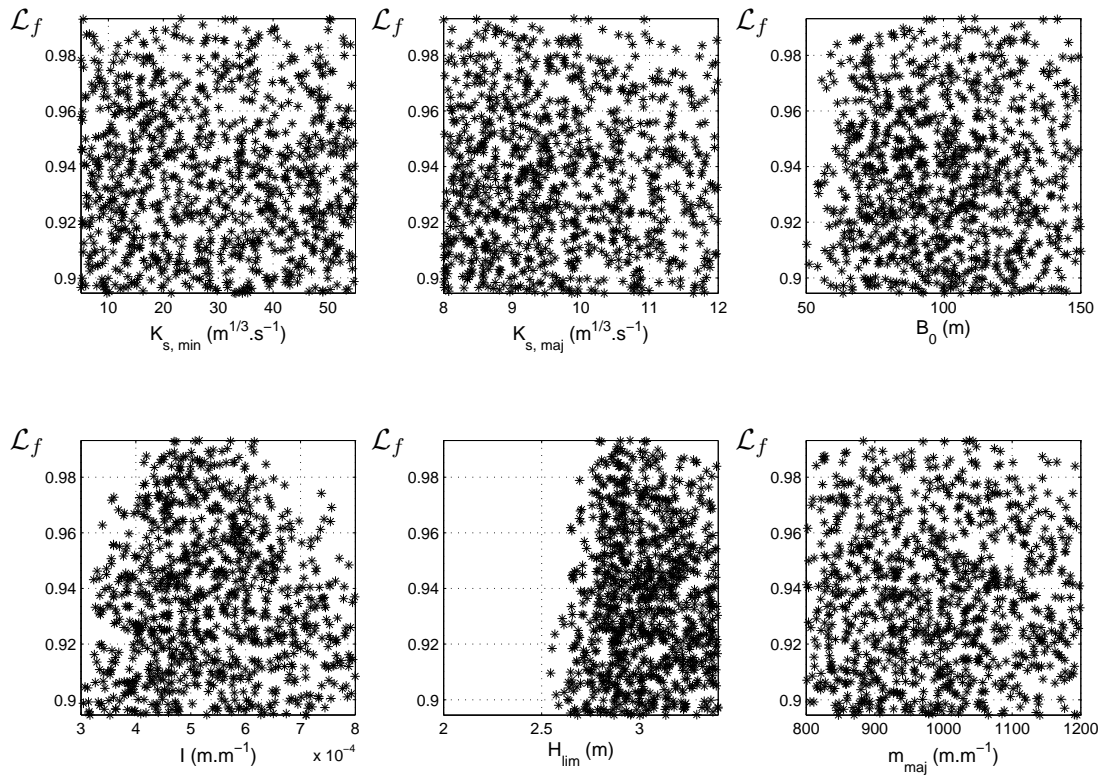


FIG. C.13 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations *behavioural*, cas test n°2

C.5.2 Densités de probabilité cumulatives

Les figures suivantes représentent les densités de probabilité cumulatives des six paramètres $K_{s,min}$, $K_{s,maj}$, B_0 , I , H_{lim} et m_{maj} , calculées à partir des valeurs des fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f pour les cas tests n°1 et 2. Elles concernent les résultats obtenus à partir des observations suivantes :

- cas n°1 : $Q = 335 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage,
- cas n°2 : $Q = 200 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 0.036$, premier tirage.

Elles sont données à titre d'exemple, afin d'illustrer les remarques du paragraphe (4.3.3) qui se rapportent à l'ensemble des observations testées.

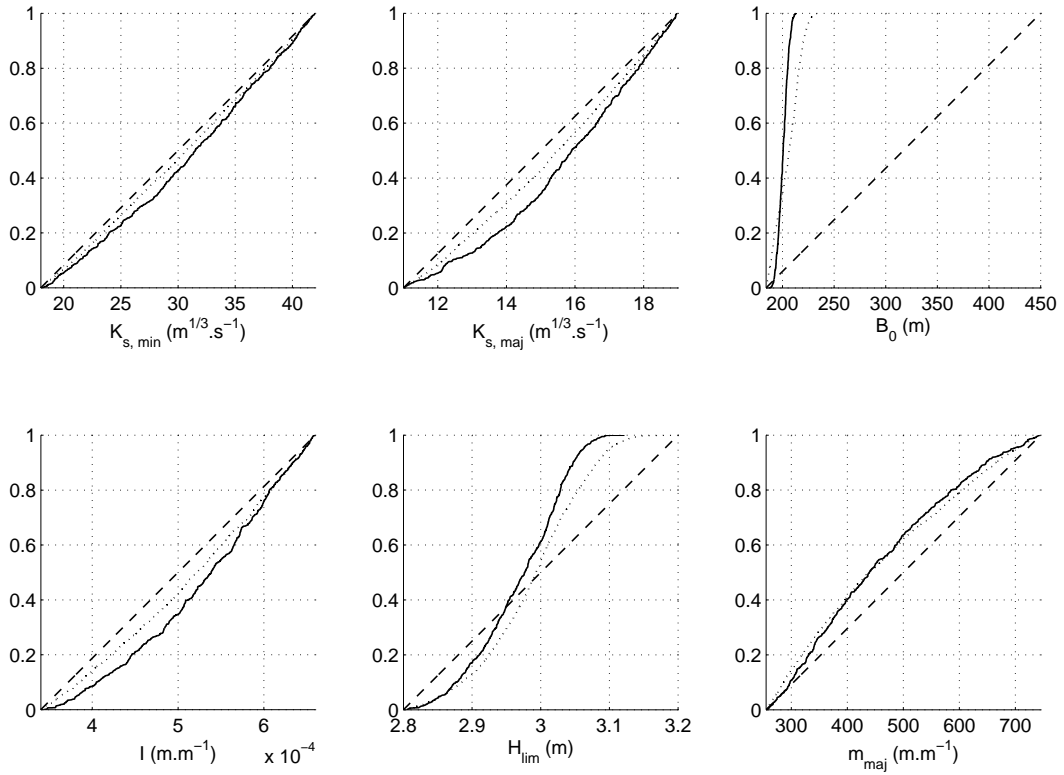


FIG. C.14 – \mathcal{L}_s , cas test n°1 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

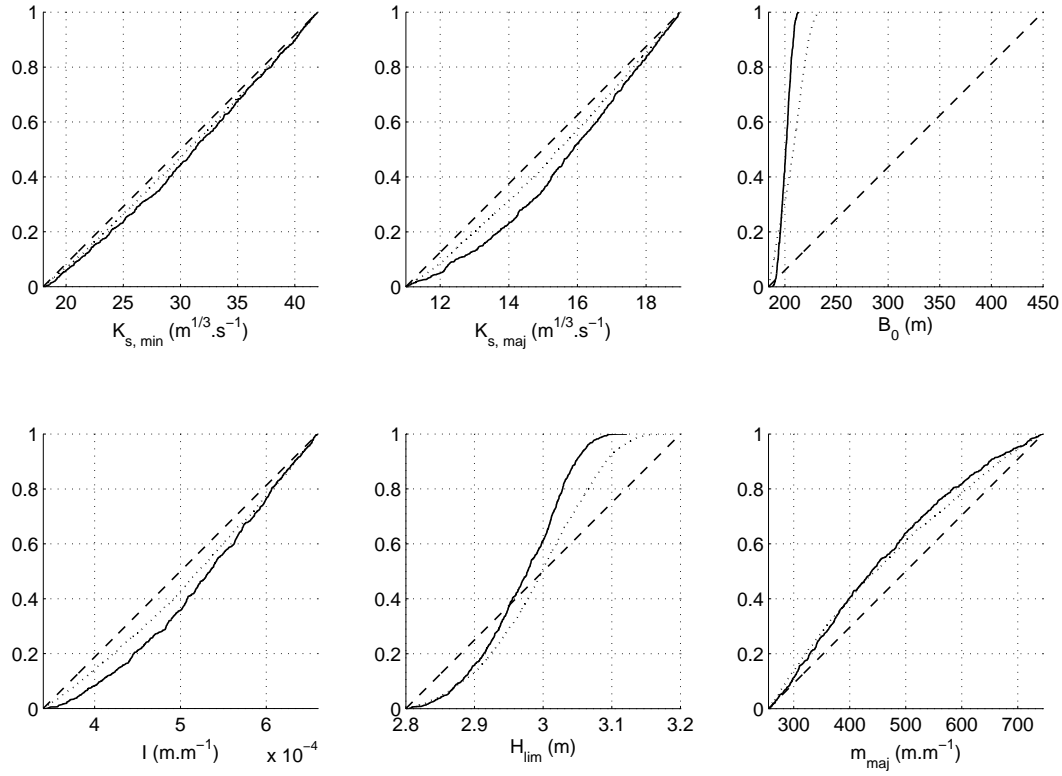


FIG. C.15 – \mathcal{L}_e , cas test n°1 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*

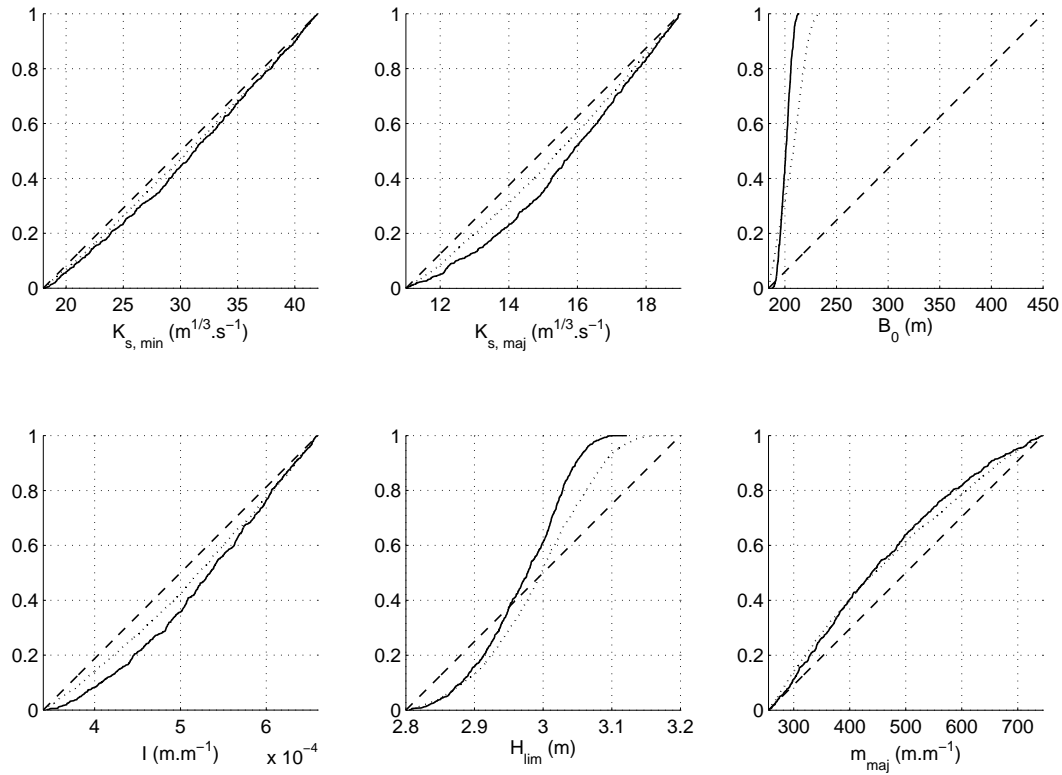


FIG. C.16 – \mathcal{L}_f , cas test n°1 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*

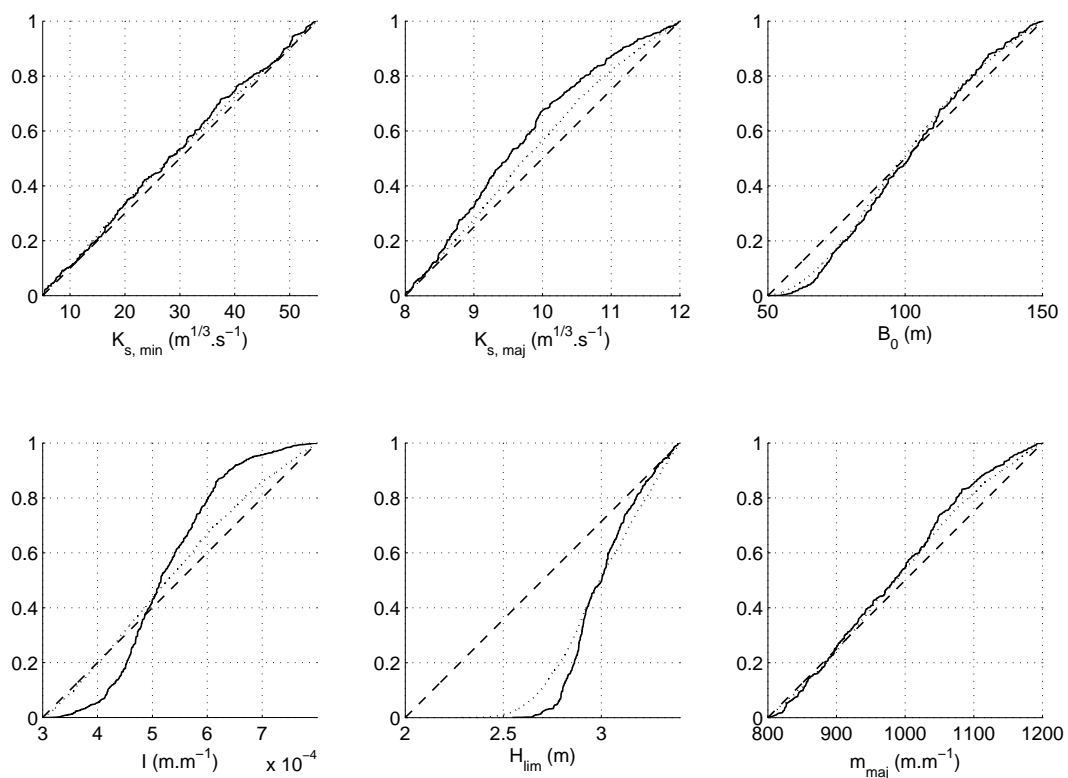


FIG. C.17 – \mathcal{L}_s , cas test n°2 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

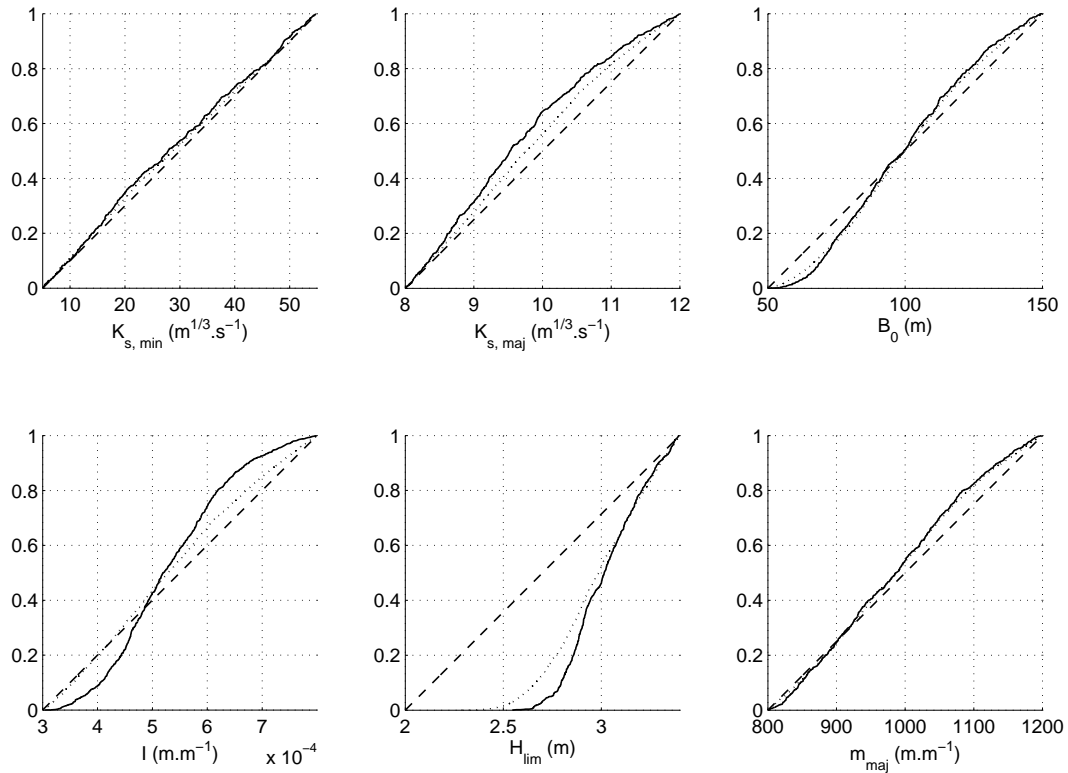


FIG. C.18 – \mathcal{L}_e , cas test n°2 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

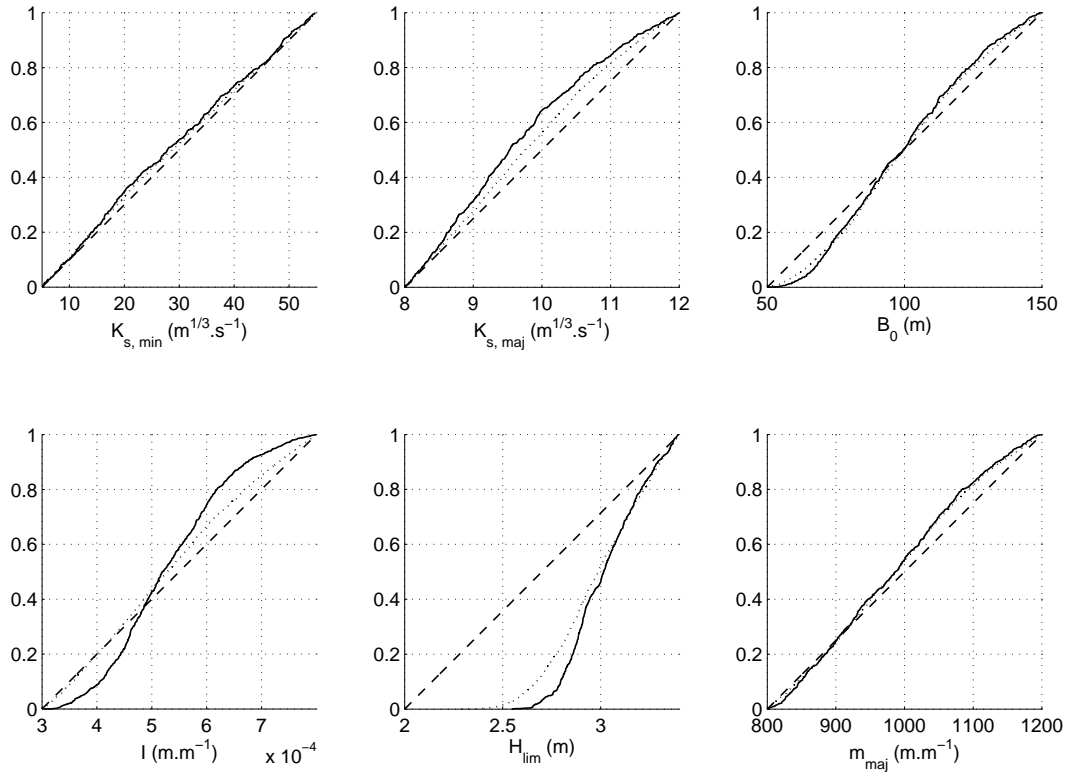


FIG. C.19 – \mathcal{L}_f , cas test n°2 : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

Annexe D

Cas d'un écoulement non permanent : analyse de sensibilité

Sommaire

D.1 Valeurs de vraisemblance	268
D.2 Densités de probabilité cumulatives	270

Cette annexe présente des résultats complémentaires, dans le cas d'un écoulement monodimensionnel non permanent. Ces figures illustrent l'analyse de sensibilité effectuée avec :

- les valeurs des fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f ,
- les densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres : le débit de base de l'hydrogramme Q_b , le débit de pointe de l'hydrogramme Q_p , la date du pic t_p et l'étalement de l'hydrogramme ℓ .

D.1 Valeurs de vraisemblance

Les figures suivantes représentent les valeurs des fonctions de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f obtenues en fonction des quatre paramètres Q_b , Q_p , t_p et ℓ .

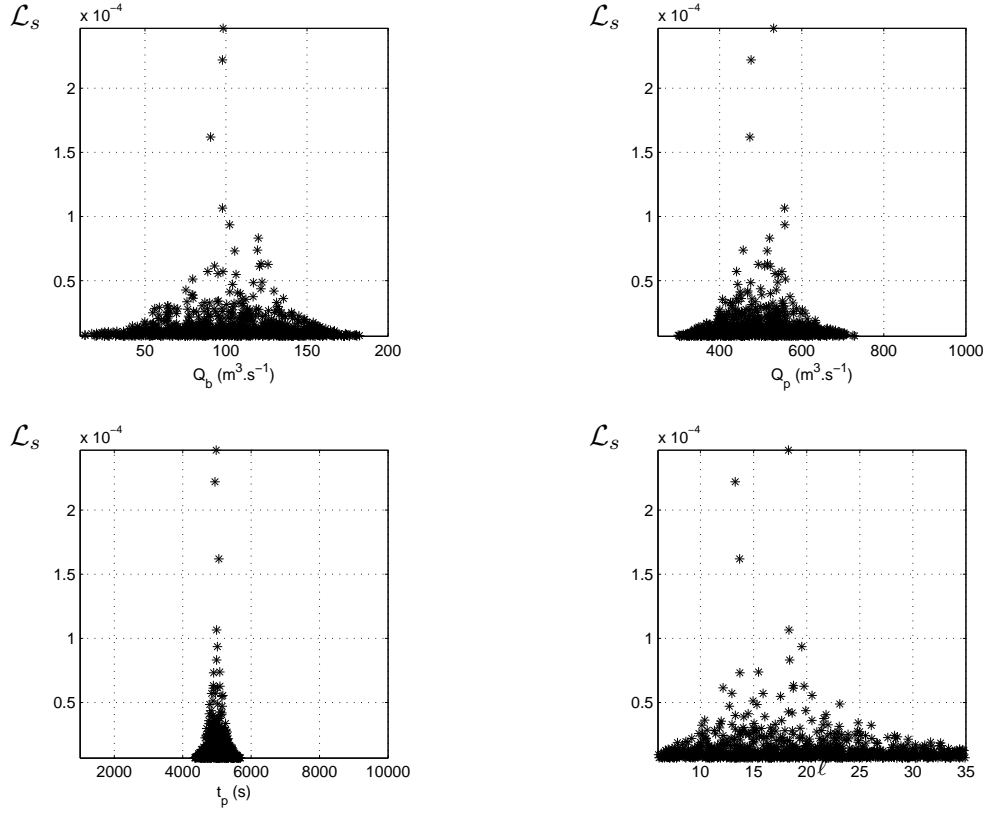


FIG. D.1 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_s obtenues, simulations *behavioural*

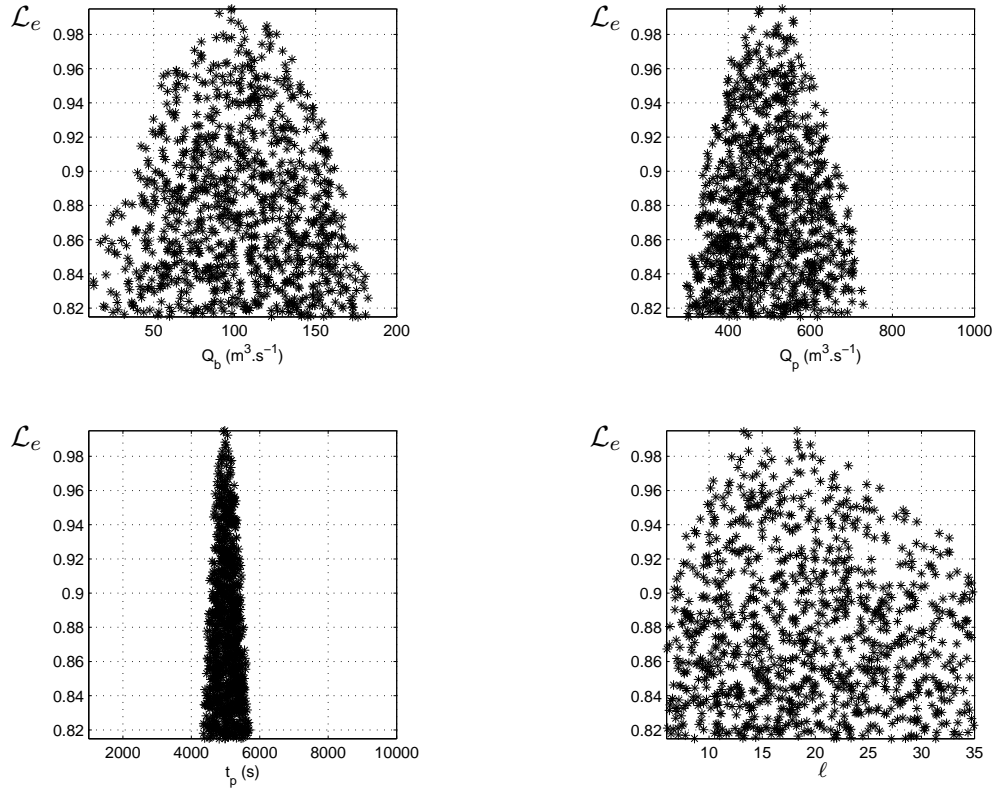


FIG. D.2 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_e obtenues, simulations *behavioural*

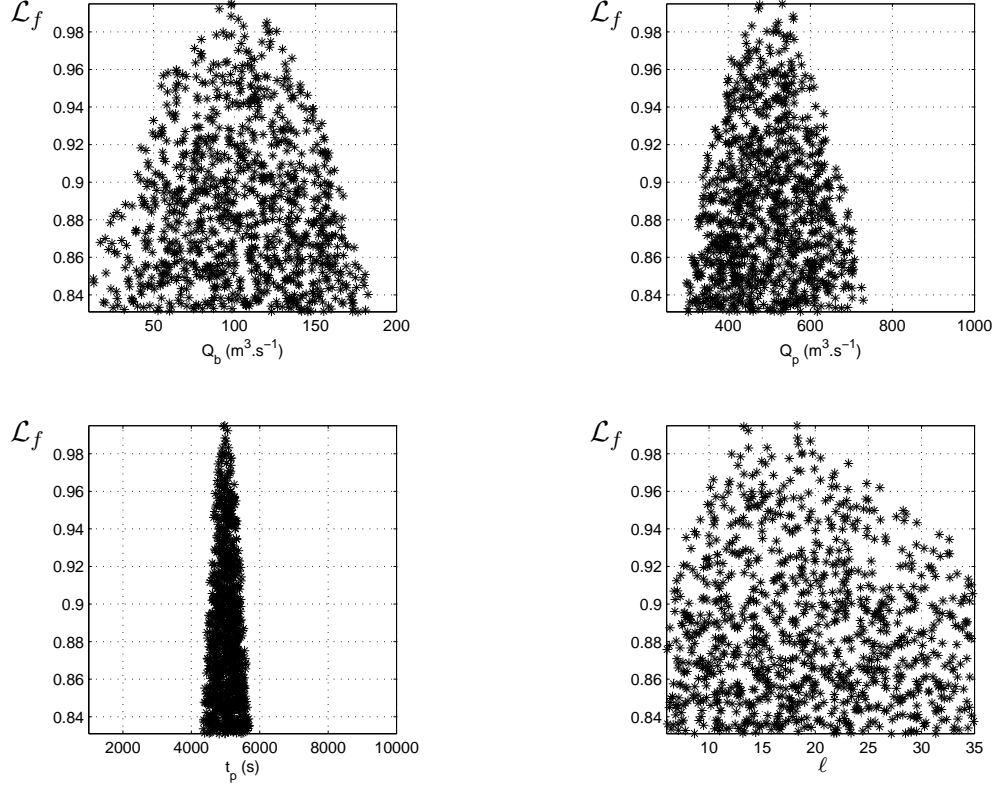


FIG. D.3 – Valeurs de vraisemblance \mathcal{L}_f obtenues, simulations *behavioural*

D.2 Densités de probabilité cumulatives

Les figures suivantes représentent les densités de probabilité cumulatives des quatre paramètres Q_b , Q_p , t_p et ℓ , calculées à partir des valeurs des fonctions de vraisemblance de vraisemblance \mathcal{L}_s , \mathcal{L}_e et \mathcal{L}_f .

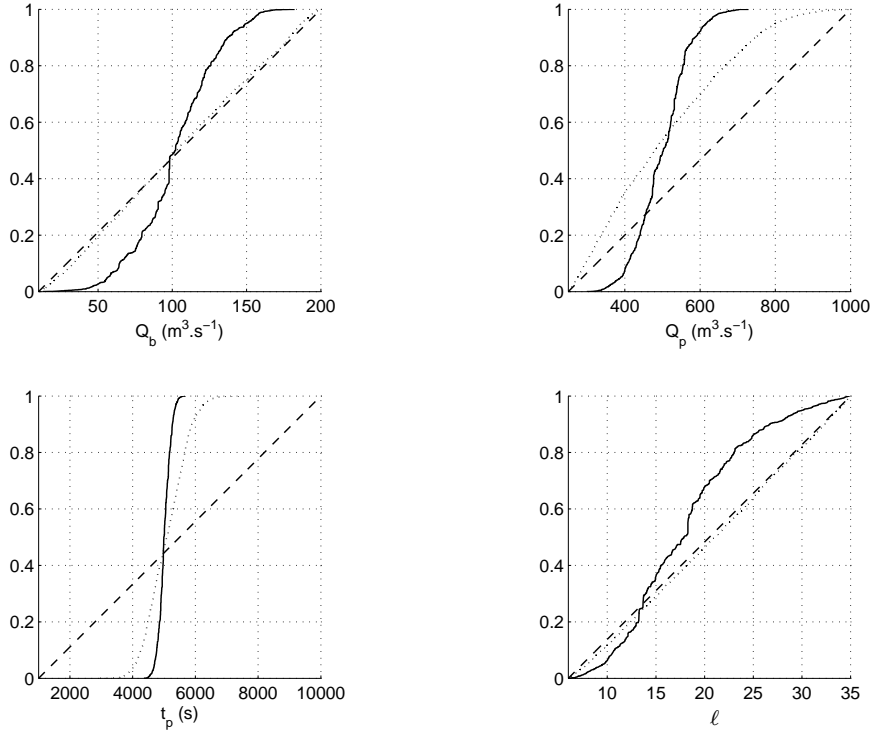


FIG. D.4 – Fonction de vraisemblance \mathcal{L}_s : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ... ddp des simulations *non behavioural*

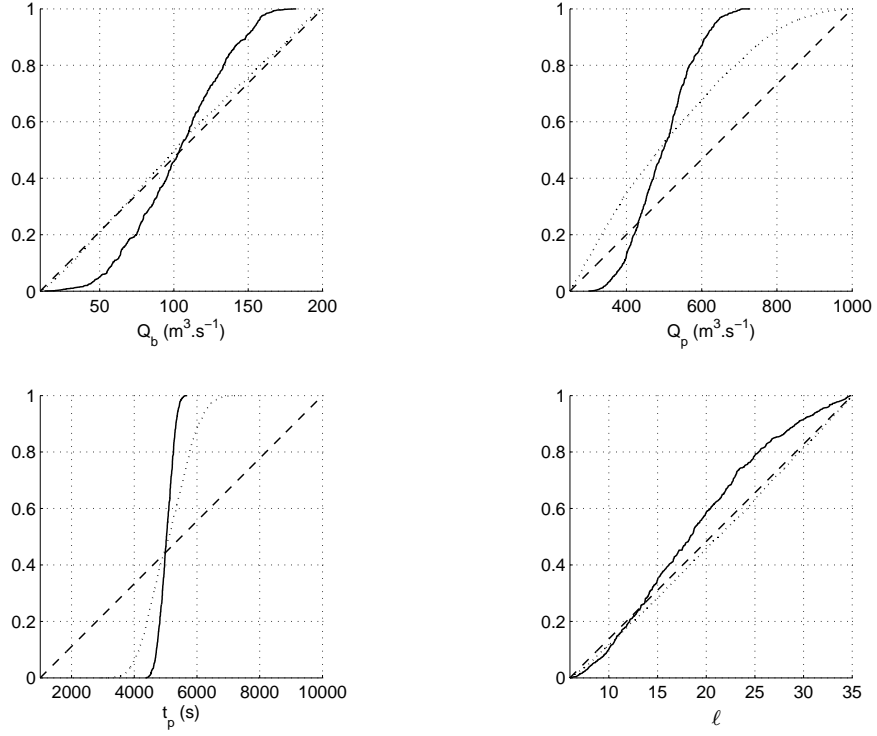


FIG. D.5 – Fonction de vraisemblance \mathcal{L}_e : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

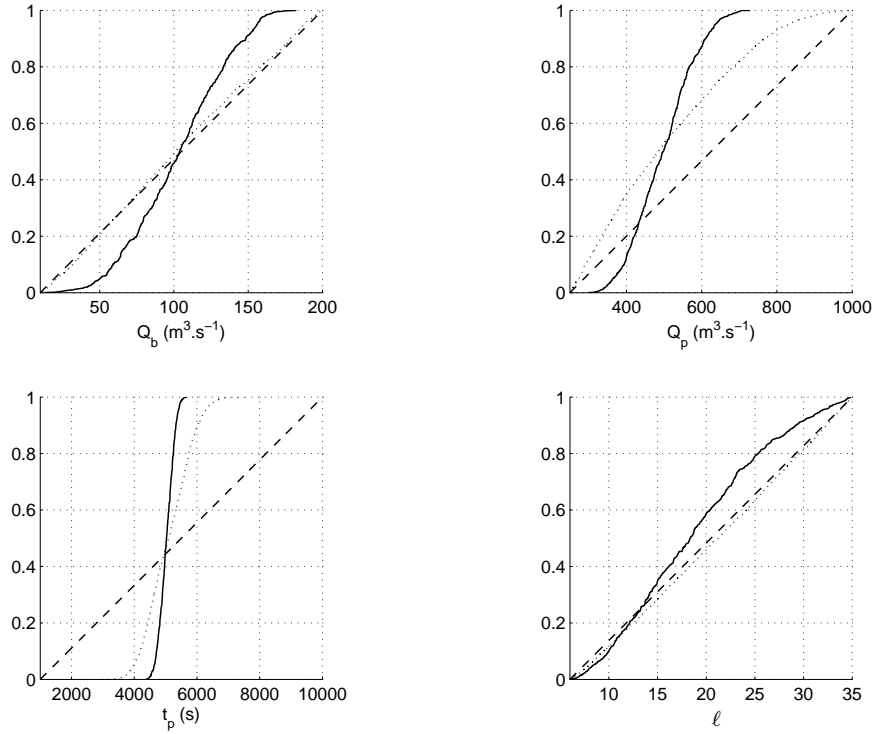


FIG. D.6 – Fonction de vraisemblance \mathcal{L}_f : -- ddp *a priori*, — ddp des simulations *behavioural*, ddp des simulations *non behavioural*

Annexe E

Transfert de calibration sur le site de la Lèze

Cette annexe présente, pour les zones 1 et 2, les erreurs ΔB (Eq. E.1) et δ_B (Eq. E.2) sur les largeurs au miroir d'un événement (2) simulées à partir de la géométrie équivalente reconstituée par assimilation d'un événement (1), selon la technique expliquée au paragraphe (8.2.3).

$$\Delta B = \frac{1}{nsec} \sum_{j=1}^{nsec} \left| \mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j \right| \quad (\text{E.1})$$

$$\delta_B = \frac{1}{nsec} \sum_{j=1}^{nsec} \left| \frac{\mathbf{B}^o|_j - \mathbf{B}^s|_j}{\mathbf{B}^o|_j} \right| \quad (\text{E.2})$$

Crue à partir de laquelle la géométrie a été calibrée	Crue simulée	ΔB (Eq. E.1)	δ_B (Eq. E.2)
Crue 15	Crue exceptionnelle	65 <i>m</i>	12.6 %
Crue 15	Crue 1977	209 <i>m</i>	11.5 %
Crue 15	Crue 2000	89 <i>m</i>	9.19 %
Crue exceptionnelle	Crue 15	65 <i>m</i>	16.9 %
Crue exceptionnelle	Crue 1977	212 <i>m</i>	17.2 %
Crue exceptionnelle	Crue 2000	106 <i>m</i>	20.4 %
Crue 1977	Crue 15	206 <i>m</i>	15.6 %
Crue 1977	Crue exceptionnelle	211 <i>m</i>	15.2 %
Crue 1977	Crue 2000	180 <i>m</i>	11.4 %
Crue 2000	Crue 15	74 <i>m</i>	11.4 %
Crue 2000	Crue exceptionnelle	103 <i>m</i>	18.8 %
Crue 2000	Crue 1977	180 <i>m</i>	11.8 %

TAB. E.1 – Simulation d'une crue à partir de la géométrie calibrée sur une autre crue : erreur sur les grandeurs simulées, zone 1

Crue à partir de laquelle la géométrie a été calibrée	Crue simulée	ΔB (Eq. E.1)	δ_B (Eq. E.2)
Crue 15	Crue exceptionnelle	75 <i>m</i>	11.5 %
Crue 15	Crue 1977	89 <i>m</i>	13.5 %
Crue 15	Crue 2000	85 <i>m</i>	13.4 %
Crue exceptionnelle	Crue 15	74 <i>m</i>	14.9 %
Crue exceptionnelle	Crue 1977	35 <i>m</i>	5.15 %
Crue exceptionnelle	Crue 2000	64 <i>m</i>	8.72 %
Crue 1977	Crue 15	87 <i>m</i>	18.1 %
Crue 1977	Crue exceptionnelle	35 <i>m</i>	5.16 %
Crue 1977	Crue 2000	72 <i>m</i>	10.0 %
Crue 2000	Crue 15	87 <i>m</i>	17.9 %
Crue 2000	Crue exceptionnelle	64 <i>m</i>	9.31 %
Crue 2000	Crue 1977	72 <i>m</i>	10.5 %

TAB. E.2 – Simulation d’une crue à partir de la géométrie calibrée sur une autre crue : erreur sur les grandeurs simulées, zone 2

Hélène Roux (2004)

**Estimation de paramètres en hydraulique fluviale, à partir de données
caractéristiques de l'imagerie aérienne**

Résumé

Depuis ses débuts, la télédétection a considérablement contribué à la progression des recherches dans le domaine de l'hydrodynamique des crues. Les nouvelles générations de satellites sont à présent en mesure de fournir des observations qui, dans un contexte général de manque de données, peuvent être valorisées. En effet, la modélisation numérique en hydraulique fait intervenir un certain nombre de paramètres qu'il est difficile d'ajuster en pratique, ce qui entraîne de délicats problèmes de calage de ces paramètres et de validation du modèle. L'objectif de ce travail est de tester la possibilité de pallier le manque d'information auquel se heurte la modélisation hydraulique, notamment par l'intégration de données issues de la télédétection, en s'appropriant des techniques d'assimilation de données. L'originalité de l'étude est de traiter des vues de dessus de la rivière montrant l'extension des eaux afin de reconstituer les paramètres nécessaires à la simulation de l'écoulement tels que le débit, le coefficient de Strickler ou bien les caractéristiques géométriques du cours d'eau. Différentes techniques d'assimilation de données sont appliquées dans le cadre d'expériences jumelles, afin de déterminer les méthodes les plus adaptées à l'objectif visé. La méthode choisie est ensuite testée sur deux sites d'étude. Un travail de transfert de calibration est également entrepris dans le but de vérifier si les paramètres estimés à partir d'une crue permettent de simuler de façon satisfaisante un autre événement. Une analyse de sensibilité et un calcul d'incertitude sur l'étendue de la zone inondée, simulée à partir des paramètres estimés, viennent compléter l'étude.

Mots clés

Assimilation de données, estimation de paramètres, hydraulique fluviale, inondation, problème inverse, télédétection

**Parameter identification in fluvial hydraulics, using data typical of remote sensing
imagery**

Abstract

Since its beginnings, remote sensing has considerably contributed to the progress of the researches in the field of flood hydrodynamic. The new generations of satellite are equipped with sensors of metric resolution. Therefore, they are now able to provide observations that need to be valorized as a new data source for hydraulic modelling. Indeed, some parameters embedded in open channel flow equations are difficult to calibrate in practice and hydraulic models are currently constrained by lack of data. The objective of this study is to test the potential of remote sensing imagery which may be used together with data assimilation methods to ascertain the value of a set of open-channel model parameters. The innovation of this study is to reconstitute information about the geometry of the river from top sight. Several data assimilation techniques have been tested on a synthetic case in order to find the most appropriate method for hydraulic parameter identification. The chosen optimisation technique has then been implemented on two test sites. The study proceeds with an assessment of model performance when model calibrations are transferred between two flood events. Finally, a sensitivity analysis is carried out, together with an estimation of predictive uncertainty.

Keywords

Data assimilation, parameter identification, fluvial hydraulics, flood, inverse problem, remote sensing

Thèse préparée au sein de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Allée du Professeur
Camille Soula, 31400 Toulouse